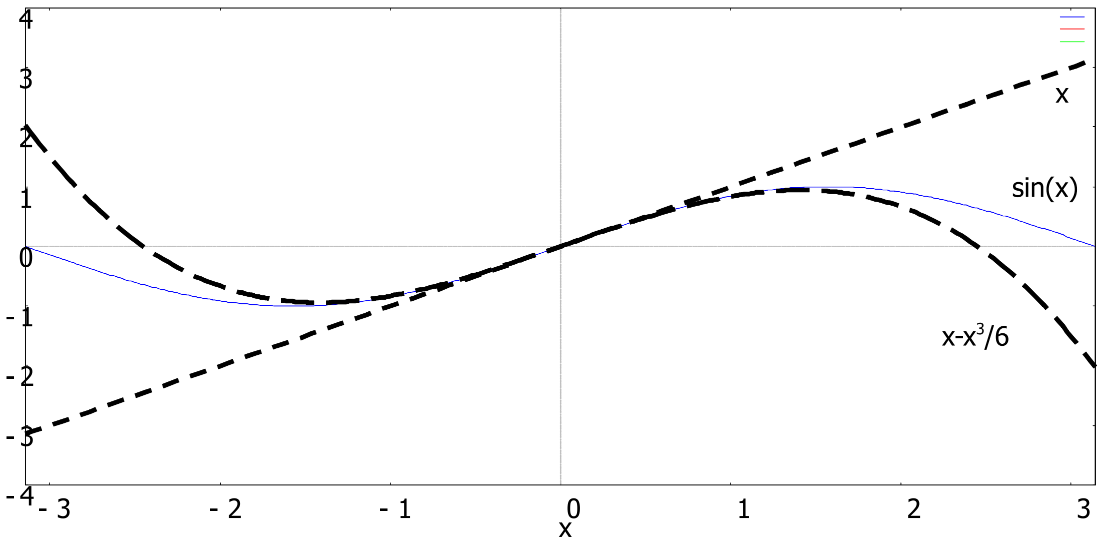
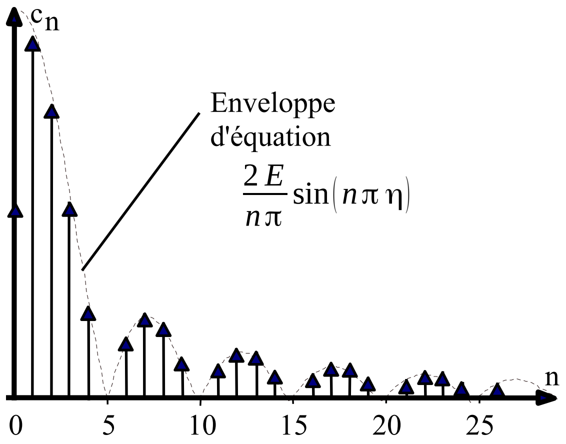


Mathématiques

$$\int_0^1 \frac{4}{(x^2+2x+3)^3}dx=\int_{\arctan(1/\sqrt{2})}^{\arctan(\sqrt{2})} \frac{\sqrt{2}(1+\tan^2 y)}{2(\tan^2 y+1)^3}dy=\int_{\arctan(1/\sqrt{2})}^{\arctan(\sqrt{2})} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos^4 y\,dy=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sin(4y)}{32}+\frac{\sin(2y)}{4}+\frac{6}{8}y\right]_{\arctan(1/\sqrt{2})}^{\arctan(\sqrt{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Par :
Bernard SIAUD
aidés par :
Bruno NEYRAN

Table des matières

Dans tout ce fascicule de mathématiques, vous pouvez voir des chapitres marqués d'un astérisque. Ces chapitres ne sont pas traités pour différentes raisons. Soit par manque de temps, soit parce qu'ils abordent des notions qui ne sont pas à votre programme. Mais, pour que ce livre soit cohérent, leur présence semblait importante.

Planning du cours de mathématiques

Journée 1 : *Les fonctions* (matin et après-midi)

Journée 2 : *Les dérivées* (matin et après-midi)

Journées 3 et 4 : Matin : *Les espaces vectoriels*, après-midi : *Les intégrales*

DS 1 : Le programme porte sur les 4 premières journées

Journées 5 et 6 : Matin : *Les matrices*, après-midi : *Les complexes, Puissance, Spectre d'un Signal*

Journées 7 et 8 : Matin : *Matrices, applications linéaires et bases* , après-midi : *Les séries de Fourier*

DS 2 : Le programme porte sur les journées 5 à 8.

I) Les fonctions

1 Les fonctions : présentation

I) Définition

Une fonction réelle f est une relation d'une partie A de $\mathbb{R}$ vers une partie B de $\mathbb{R}$ où chaque élément de A a au plus une seule image dans B. C'est à dire que chaque élément x de A admet 0 ou 1 image notée f(x) dans B.

On peut aussi dire, soit f(x) n'existe pas, soit f(x) ne donne qu'une seule réponse (pas un choix).

Quels sont les graphes de fonction parmi les 4 suivants ?

[redacted]

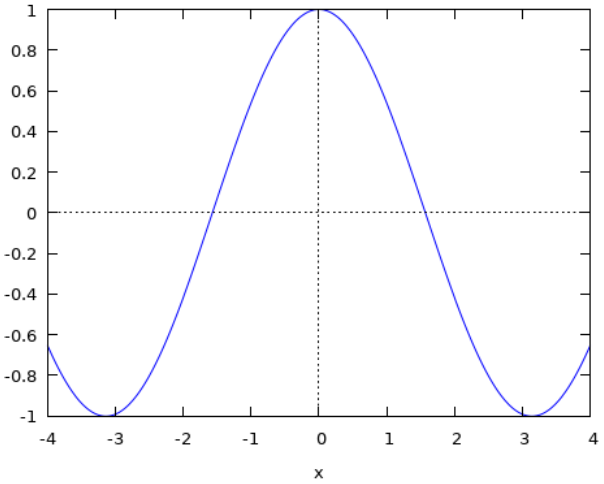
Attention, il y a un piège...

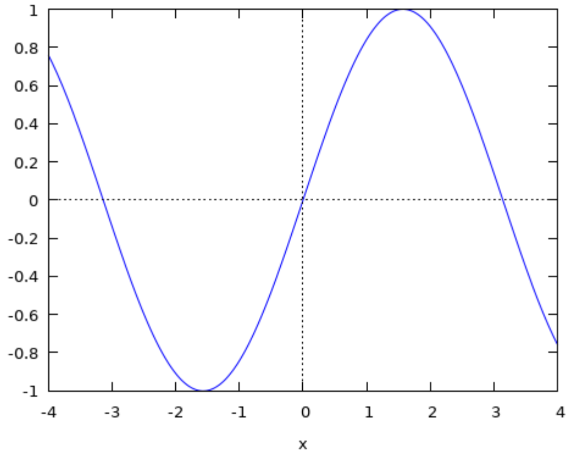
2 Analyse de fonctions

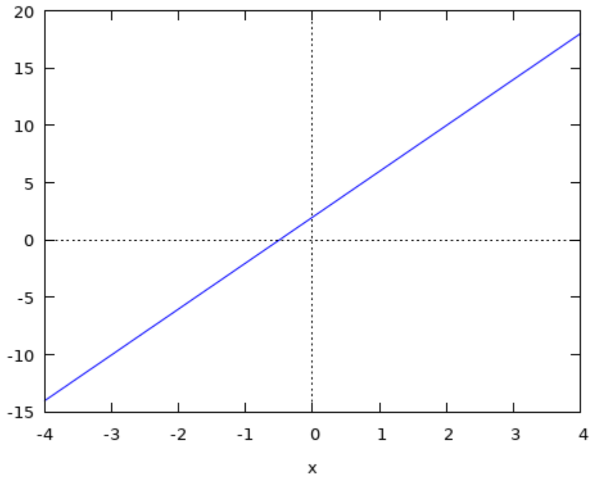
I) Fonctions simples

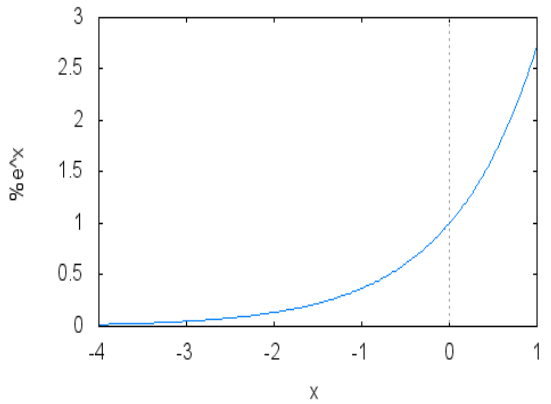
Identifier les courbes suivantes : $f(x)=ax+b$ (montrez bien a et b sur le graphe); $f(x)=\exp(x)=e^{x}$; $f(x)=\exp(-x)=e^{-x}$; $f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=\ln(x)$, $f(x)=\sin(x)$ et $f(x)=\cos(x)$.

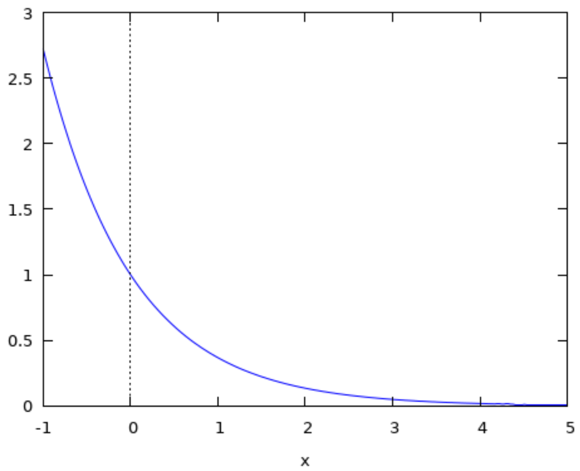
Pour ceci, il faut commencer par bien identifier les axes (c'est une bonne habitude à prendre).

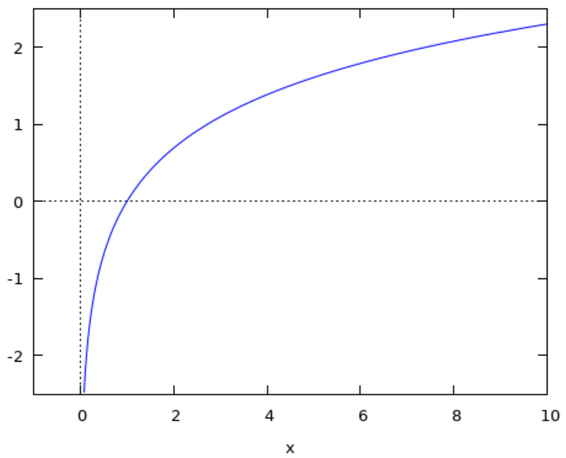


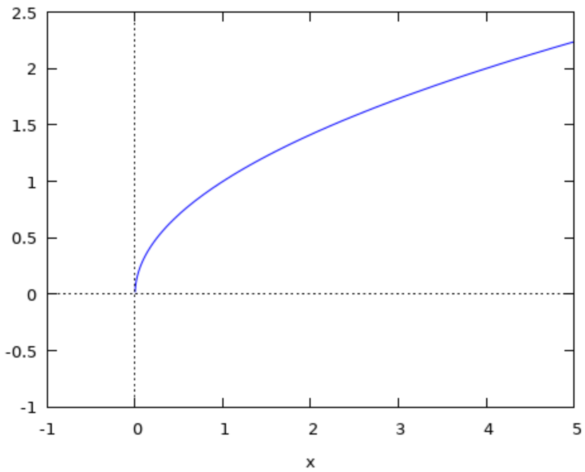


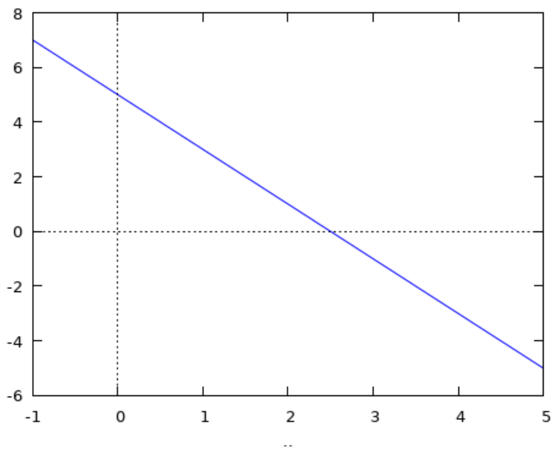












Il est important d'avoir en tête le tracé simplifié de ces fonctions.

II) Fonctions composées

Tracez les fonctions suivantes en graduant les axes :

$$x(t)=\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad ; \quad x(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad ; \quad x(t)=V\cos\left(\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\right) \quad ; \quad x(t)=\frac{E_1}{T}t+E_2$$

On prend T>0 et V>0.

<u>Remarque :</u> en mathématiques, on utilise généralement la variable x, MAIS en traitement du signal, on utilise la variable t, comme sur un oscilloscope.

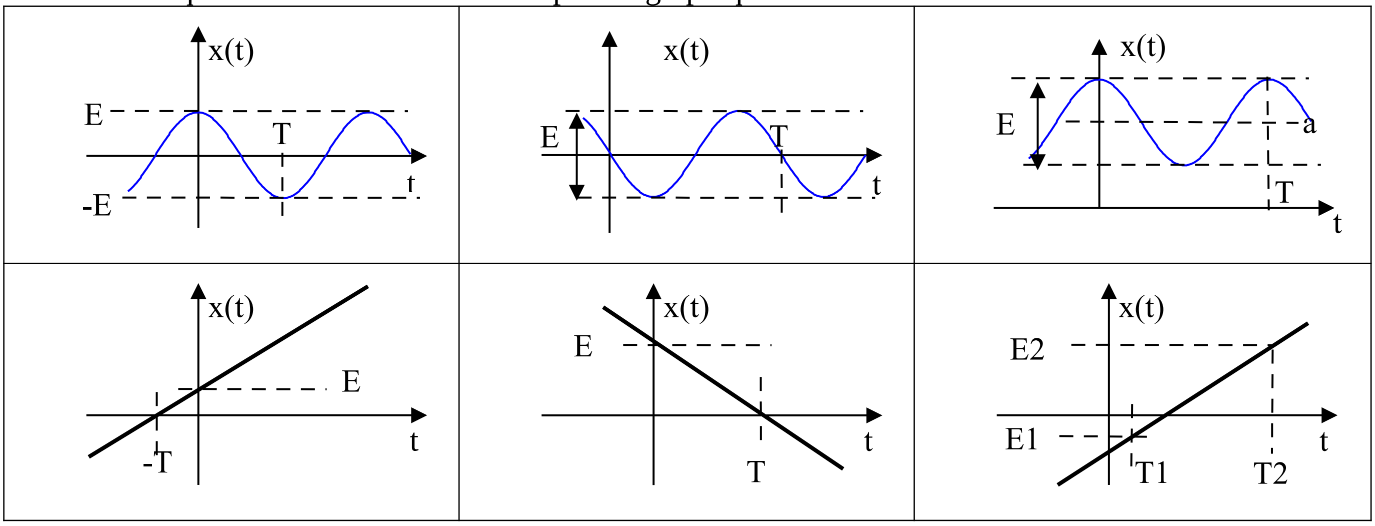
<u>Remarque :</u> en électronique et en traitement du signal, la grandeur angulaire variable $\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ dépend de manière linéaire du temps. Cette grandeur angulaire $\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ s'écrit aussi (ωt) avec ω (la pulsation en rd/s). L'utilisation de la forme $\frac{2\pi}{T}$ fait apparaître explicitement la période T. Pour la valeur du temps t=T, la grandeur angulaire variable vaut $\left(\frac{2\pi}{T}T\right)=2\pi$ ce qui correspond à un tour du cercle trigonométrique.

À retenir $\boxed{\omega=2\pi fréquence=\frac{2\pi}{période}}$

Ceci donne $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ où T est la période, f la fréquence, ω la pulsation.

III) Retrouvez les fonctions (vérifier en traçant informatiquement les courbes)

Donnez l'équation des courbes données par les graphiques suivants :



IV) Exercice pour s'entrainer :

À partir de la courbe y=sin(x), tracez le graphe des deux fonctions suivantes :

f(x)=|sin(x)| et g(x)=|sin(x)|+sin(x)

V) Logarithme : à faire seul, c'est à connaître.

<u>Notation</u> : la notation préconisée pour le logarithme naturel est ln(x), mais les mathématiciens « purs » préfèrent la notation log(x). C'est la notation log(x) qu'on retrouve dans les logiciels de mathématique comme Maxima, Matlab, Scilab. Excel et Calc dont le nom des fonctions a été francisé acceptent la notation ln() et log().

Domaine de définition : Dérivée : ; (ln |u|)'=

Limites aux bornes : $\lim_{x\to 0} \ln(x)=$ $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=$

ln(ab)= ; ln(1/a)= ; ln(a/b)= ; $\ln(a^b)$=

$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x)=$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}=$ avec $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

VI) Exponentielle : à faire seul, c'est à connaître.

Domaine de définition : Dérivée : ; $(e^{ax})'=$

Limites aux bornes : $\lim_{x\to-\infty} e^x=$ $\lim_{x\to+\infty} e^x=$

exp(a+b)= ; exp(-a)= ; exp(a-b)= ; exp(ab)=

$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x=$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}=$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

VII) Exercices

A) Logarithme

Résoudre : ln(x+1)-ln(x+5)=ln13 ; ln(x+1)+ln(x+5)=ln13 (Vérifier les solutions trouvées).

B) Exponentielle

1) Résoudre : $e^{2x-1}=e^{x^2}$; $e^{x+2}\cdot e^{-1/x}=e$; $e^{2x}+e^x-2=0$

2) Simplifier sans calculatrice : exp(ln 6) ; exp(2 ln 3) ; exp(a ln b) ; ln(exp (-1)) ; ln(2exp 3) ; exp(x ln a) et exp(x ln x).

Remarque : a^x est défini avec exp(x ln a), donc pour a>0 uniquement.

C) Tracer les fonctions suivantes

$x(t)=\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ avec $\tau>0$ constante. (placer x(τ) et tracer la tangente à la courbe en 0) ;

$x(t)=E\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ (placer x(τ) et tracer la tangente en 0) ;

VIII) Fonction logarithme décimal : $\log_{10}$ x, échelle logarithmique

On défini $\log_{10}(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

1) Calculez $\log_{10}(10)$; $\log_{10}(1000)$; $\log_{10}(10^a)$.

2) Vérifiez les propriétés habituelles du ln sur le log : $\log_{10}(ab)$= ; $\log_{10}(1/a)$= ; $\log_{10}(a/b)$= ; $\log_{10}(ab)$=

3) Application : l'échelle logarithmique.

Compléter le tableau suivant :

x	0,01	0,1	0,5	1	2	5	10	20	50	100	1000
X=$\log_{10}(x)$											

Placer les valeurs de x sur une échelle linéaire.

On peut remarquer que sur une échelle linéaire la **même distance** sur l'axe correspond à la **même différence** de valeurs (même distance entre 1 et 2 qu'entre 10 et 11).

Placer les valeurs de X sur la partie supérieure d'une nouvelle échelle linéaire.

Placer les valeurs de x correspondantes sur la partie inférieure de la même échelle. Masquer les valeur de X. On a construit une échelle logarithmique pour les valeurs de x.

Sur l'échelle logarithmique à quoi correspond la **même distance** sur l'axe ?

Placer les nombre 0 ; –0,1 sur l'échelle logarithmique. Que pensez-vous ?

Remarque 1 : Comme il existe $\log_{10}(x)$ en base 10, avec les mêmes propriétés, on peut avoir $\log_a(x)$ en base a réel positif quelconque. $\log_2(x)$ peut-être utiliser pour le binaire.

Remarque 2 : les anglais n'ont pas l'écriture ln pour le logarithme népérien. Ils notent log le logarithme népérien et $\log_a(x)$ les autres dont $\log_{10}(x)$. Ceci est à savoir dès qu'on souhaite programmer car en général, ln est inconnu et est remplacé par log qui n'est pas le logarithme décimal.

IX) Musique *

(intermède compréhensible par les musiciens : on trouve les harmoniques, l'accord parfait et le comma)

1) Deux notes séparées d'un demi-ton ont toujours le même rapport de fréquence (aiguë / grave), on le notera a. Plus la fréquence monte, plus la note est aiguë. S'il y a un écart de d demi-tons le rapport est de a^d . Dans une gamme il y a 12 demi-tons (comptez les touches d'un piano ou le nombre de barrettes d'une guitare). Donc en 1 octave, la fréquence varie de a^{12} . Comme d'une octave à l'autre, la fréquence à un rapport de 2, $a^{12}=2$, d'où $a=\sqrt[12]{2}$.

Trouver d tel que $a^d=n$ (utiliser les logarithmes).

Trouver les écarts (en demi-tons) entre deux notes dont le rapport est 2, 3, 4 ,5 et 6.

Si la note grave est un do, que sont les 5 autres notes (il faut arrondir un peu). Que forment ces notes ?

2) Trouvez n et m tel que $2^n=530000$ et $3^m=530000$.

Nb : en arrondissant n et m à l'entier le plus proche (très proche), on peut remarquer que si on monte de n octaves, ceci revient à monter m intervalles d'octave + quinte (ou 15 tons et demi), intervalle trouvé avec le rapport 3. Et on arrive bien à la même note, ou presque (si on part d'un Do, on arrive à Do et Si#) ! On a un comma d'écart (http://fr.wikipedia.org/wiki/Comma_%28musicologie%29).

X) Domaine de Définition

A) Présentation-notation

Soit f définie de A sur B, on appelle ensemble de définition de f, la partie Df de A qui possède tous les éléments qui ont une image dans B par f et uniquement ceux-là. C'est à dire tous les éléments x de A tels que f(x) existe.

Remarque : Cet ensemble est noté Df. Pour une fonction g il sera noté Dg.

Exemple : h(x)=ln(x+2) ⇒ Dh=]-2 ;+∞[.

B) Détermination de domaines de définition

Il faut trouver les points qui génèrent des problèmes : des fonctions qui ne sont pas définies dans $\mathbb{R}$ comme les fonctions racine, logarithme, inverse :

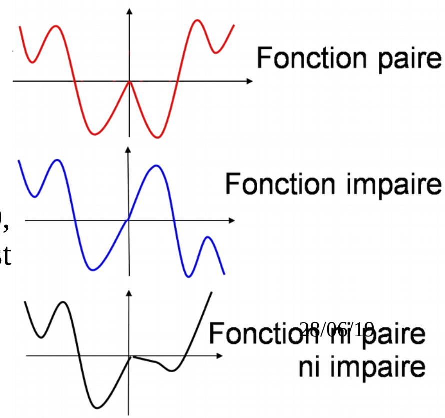
ln(x) ⇒ x>0, ; 1/x ⇒ x non nul ; $\sqrt{x}\Rightarrow x\geq 0$.

Nous verrons d'autres fonctions par la suite dont le domaine de définition n'est pas $\mathbb{R}$: arcsin (asn), arccos (acs).

C) Exercices

Donnez les domaines de définition des fonctions suivantes :

$f(x)=\sqrt{\ln(x)}$; $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)+1}$; $h(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}}{\ln(x)}$



XI) Parité

La parité indiquant une symétrie en x autour du point d'abscisse x=0, avant de l'étudier, on peut vérifier que le domaine de définition est symétrique aussi par rapport à 0 (si $x \in Df$ alors $-x \in Df$).

Par exemple :

Df=]-1;1] => cette fonction ne peut avoir de parité car 1 est dans Df mais pas -1.

Df=[-4;4] ou $Df = \mathbb{R}$ = > on peut faire l’étude.

Remarques :

1) l’étude du domaine de définition n’indique pas une parité, elle peut uniquement montrer qu’il n’y en a pas.

2) les fonctions ne sont pas obligatoirement paires ou impaires, les fonctions ayant une parité sont exceptionnelles. $x+x^2$, ln(x), exp(x) par exemple n’en ont pas.

A) Fonction paire

Une fonction paire vérifie la propriété suivante : pour tout x, f(-x)=f(x)

Son graphe géométrique (courbe d’équation y=f(x))admet l'axe des y (droite des ordonnées équation x=0) comme axe de symétrie.

Pour étudier cette fonction, on peut donc faire l’étude sur la moitié positive de l’ensemble de définition et trouver l’autre par correspondance.

Exemples : cos(x), f(x)=1; $f(x)=x^2$ (polynômes avec que des exposants pairs); f(x)=cos(x)

B) Fonction impaire

Une fonction est impaire si et seulement si pour tout x, f(x)=-f(-x)

Son graphe admet l’origine (le point de coordonnées (0,0)) comme point de symétrie.

Pour étudier cette fonction, on peut donc faire l’étude sur la moitié positive de l’ensemble de définition et trouver l’autre par correspondance.

Exemples : f(x)=sin(x); f(x)=x; $f(x)=x^3$ (polynômes avec que des exposants impairs).

C) Opération sur la parité

Les lois sur l'addition, la soustraction, la multiplication et la division se trouvent facilement en considérant les mêmes opérations entre réel où une fonction paire est un réel positif et une fonction impaire, un réel négatif.

La somme ou soustraction de deux fonctions paires donne une fonction paire et la somme ou soustraction de deux fonctions impaires qui donne une fonction impaire. Par contre la somme ou soustraction d’une de chaque donne une fonction quelconque.

La multiplication ou division de deux fonctions paires ou de deux fonctions impaires donne une fonction paire. La multiplication ou division d’une fonction paire par une impaire donne une fonction impaire.

<u>Exemples :</u> donnez la parité des fonctions suivantes : $f(x)=\sin(x)\cdot(x^2+3)$, $g(x)=(x^4+3)\cdot\cos(x)/\ln(2+x^2)$

*D) Décomposition d’une fonction quelconque **

Soit f(x) une fonction quelconque dont le domaine de définition est symétrique par rapport à 0.

$f_1(x)=(f(x)+f(-x))/2$ est pair, $f_2=(f(x)-f(-x))/2$ est impaire et $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. Nous avons la décomposition de f en une fonction paire et une fonction impaire. Cette décomposition est unique.

E) Exercices

1) Les fonctions f, g et h dont on a étudié le domaine de définition ont-elles une parité ?

2) Trouvez la parité éventuelle des fonctions suivantes :

$i(x)=\ln(x^2+1).\sin(x)$; $\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; th(x)=sh(x)/ch(x) (cosinus, sinus et tangente hyperbolique)

XII) Exercices pour s’entrainer

1) Donnez le domaine de définition de $w(t)=\frac{\sqrt{\ln(t)}}{\sin(t)}$

2) donnez la parité de $v(t)=\frac{t^3+\sin(t)}{\cos(t)+e^t+e^{-t}}$ (remarque $e^t+e^{-t}>1$ => $\cos(t)+e^t+e^{-t}>0$)

3 Périodicité

I) Périodicité

A) Définition

On dit que la fonction f est périodique s'il existe T∈$\mathbb{R}^{+}{}_{*}$ tel que, pour tout x∈Df x+T∈Df et f(x)=f(x+T), On dit que T est une période de f.

Si T_0 est la plus petite période, alors $T=nT_0$ (n∈ℕ), On dit que T_0 est la période de f.

On dit aussi que f est T-périodique.

B) Fonctions périodiques de base

Les fonctions périodiques de bases sont les fonctions trigonométriques : sin(x) et cos(x) ont une période de 2π alors que tan(x) a une période de π.

Ceci permet de donner la périodes de cos(ωt) et sin(ωt) qui est T=2π /ω car pour une période on a $x=2\pi$ pour les fonctions sin(x) et cos(x) et on donc ωT=2π pour les fonctions cos(ωt) et sin(ωt).

Ce qui donne T=2π /ω.

De même x=π pour une période de la fonction tan(x), et donc ωT=π pour la fonctions tan(ωt). Ce qui donne T=π /ω.

C) Opération entre fonctions périodiques

Soient f et g deux fonctions périodiques dont les périodes sont respectivement Tf et Tg.

Si on additionne, soustrait, multiplie ou divise f et g on obtient une fonction périodique si et seulement si Tf/Tg est un rationnel : c’est à dire qu’il peut s'écrire a/b avec a et b entier. a/b peut s'écrire de multiple façon, on retiendra pour la suite la forme irréductible de la fraction (http://troumad.org/Math/nb_premiers.php#fractions).

Soit h la fonction correspondant à l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division de deux fonctions f et g dont le rapport des périodes est $\frac{T_f}{T_g}=\frac{a}{b}$, alors la valeurs $T=bT_f=aT_g$ correspond à une période de la fonction h. C’est la plus petite qu’on peut facilement trouver. Mais ce n’est pas toujours la période (la plus petite) : regardez par exemple tan(x)=sin(x)/cos(x) ou $\cos^2(x)=\frac{\cos(2x)+1}{2}$.

Pour trouver la plus petite période, on essaie les sous-multiples de T : T/2, T/3, ... pour vérifier si ce sont aussi des périodes de h.

D) Pulsation

La pulsation d'un mouvement rectiligne sinusoïdale d'équation horaire x=a cos(ωt+ϕ) avec a>0 est le nom donné au réel ω. La pulsation de cos(t) est donc 1.

Donnez le lien entre la période, la pulsation et la fréquence pour une fonction du type f(t)=a cos(ωt+ϕ)

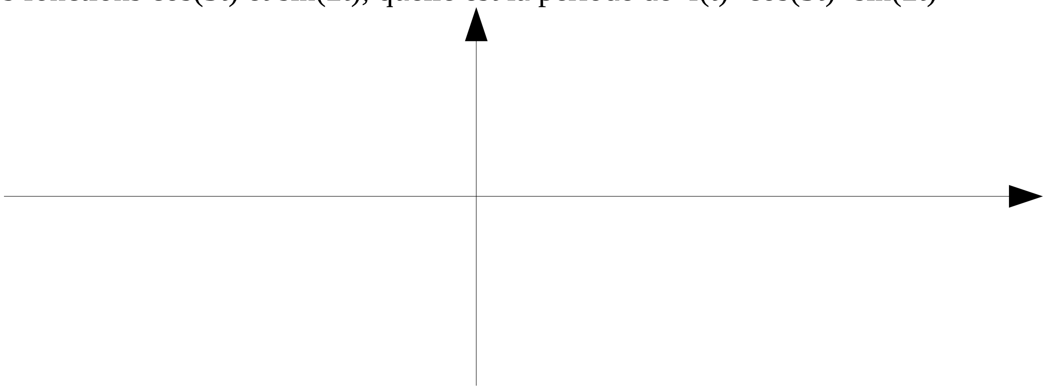
E) Décomposition en série de Fourier *

Il existe une théorie très intéressante qu’on verra plus tard avec ces fonctions : la décomposition en série de Fourier. Elle décompose les signaux périodiques en somme de fonctions sinusoïdales : le fondamentale et les harmoniques. Cette théorie est très utile pour le traitement du signal car en électronique, les fonctions de transfert sont étudiées uniquement avec des signaux sinusoïdaux.

F) Exercices :

1) Les fonctions f, g et h dont on a étudié le domaine de définition ont-elles une périodicité ?

2) Tracer les fonctions cos(3t) et sin(2t), quelle est la période de f(t)=cos(3t)+sin(2t)



3) Donnez les périodes et les pulsations de f(x)=sin(6x)+cos(10x), g(x)=cos(πx).sin(10x), k(x)=cos(30x)+tan(35x) ; l(x)=sin(x/9)+cos(x/6) ; $m(x)=\sin(\pi x)+\tan(4x)$ et n(x)=sin(x).cos(x)

Compléter avec les exercices non faits de la semaine dernière

II) Exercices pour s'entrainer

1) a) On définit la fonction f(x) par $f_0(x)=x$ sur [0;1[tracez le graphe de $y=f_0(x)$ sur [0;1[

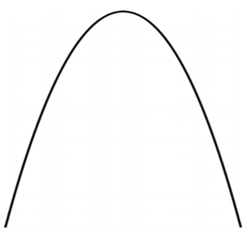
b) Maintenant on nous dit que ce graphe sur [0;1[est le motif d'une fonction qui a une période de 1. Tracez le graphe de cette fonction pour $x\in[-5;5]$ minimum.

2) Trouvez la plus période la plus simple de u(t)=30cos(28t)+28sin(30t)

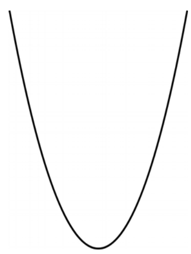
4 Les équations et polynômes réels du second degré

I) Idée générale

Si on met horizontalement l'axe des x et verticalement l'axe des y, en traçant la courbe représentative de $y=f(x)=ax^2+bx+c$, nous auront obligatoirement une parabole orientée vers le haut où vers le bas en fonction du signe de a :

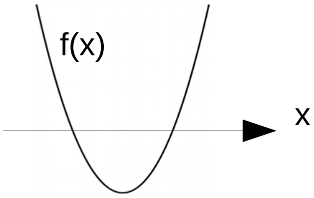


si a<0 ou

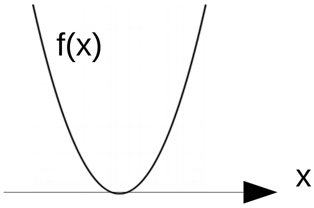


si a>0.

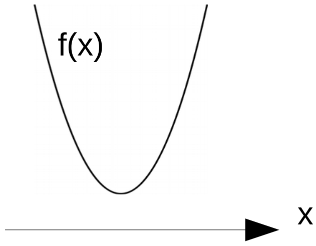
Suivant où se trouve l'axe des abscisses, nous voyons que nous avons trois possibilités pour la résolution de l'équation $f(x)=ax^2+bx+c=0$:



l’axe des abscisses coupe la courbe : il y a deux solutions.



l’axe des abscisses est tangent à l’extremum (l’extremum est 0) : il y a une solution unique.



l’axe des abscisses ne coupe pas la courbe : il n’y a pas de solution.

II) Résolution de l’équation ax²+bx+c=0

A) *Mise en forme canonique(facultatif)*

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}\right)$$

Nous allons factoriser ax²+bx+c en utilisant l’identité remarquable (a+b)²=a²+2ab+b².

Nous regardons uniquement $x^2+\frac{b}{a}x$ que nous voulons identifier au début du développement de $(x+\alpha)^2=x^2+2\alpha x+\alpha^2$, donc $\alpha=\frac{b}{2a}$. Ceci donne $x^2+\frac{b}{a}\cdot x=(x+\alpha)^2-\frac{b^2}{4a^2}$ d’où $x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}=(x+\alpha)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=(x+\alpha)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

<u>Remarque :</u> cette méthode de transformation est utile par la suite pour intégrer des fractions rationnelles et faire des transformées de Laplace inverses. On appelle la forme ainsi trouvée la forme canonique.

En posant $\Delta=b^2-4ac$, nous voyons clairement les 3 trois cas entraperçus précédemment :

1. Δ>0

Nous voyons que si $\Delta>0$ le polynôme s’annule deux fois quand $(x+\alpha)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ (car 4a²>0)

Ceci donne $x+\alpha=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=-\alpha\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

2. Δ=0

Le polynôme ne s’annule qu’une fois quand $x+\alpha=0$, c’est-à-dire $x=-\alpha=\frac{-b}{2a}$

3. Δ<0

Ceci nous donne $\frac{-\Delta}{4a^2}>0$ donc $(x+\alpha)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$. On en déduit que le polynôme ne peut jamais s’annuler.

B) *Conclusion (à savoir)*

Soit l’équation : $f(x)=ax^2+bx+c=0$,

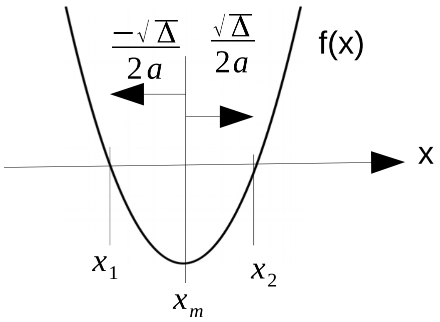
La fonction f(x) présente un extremum pour $f'(x)=2ax+b=0$ soit $x_m=\frac{-b}{2a}$

On définit le discriminant : $\Delta=b^2-4ac$, on peut en déduire la forme de la solution en fonction du signe de Δ.

- $\Delta \geq 0$: $S=\left\{x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$, deux racines réelles centrées autour de l'extremum x_m . Dans le cas particulier $\Delta=0$, les deux racines se ramènent à une seule sur l'extremum $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ appelée racine double. En se référant au dessin, c'est la jonction des deux précédentes racines si on fait glisser l'axe des abscisses afin qu'il passe par l'extremum.

Cela peut se représenter par :

$x_1=x_m+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=x_m-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$



- $\Delta<0$: $S=\emptyset$: pas de racine réelle

C) Exemples : tracé de fonctions

Étudiez les fonctions suivantes : f(x)=3x²+4x-7 et g(x)=-2x²+6x-5 (trouvez les variations, les extremums et tracez sommairement les courbes).

Remarques :

- où se trouvent les zéros (quand il y en a) par rapport à l'extremum ?
- si on écrit la fonction sous la forme ax²+bx+c quelle est l'expression de l'extremum ?

Résoudre dans l'ensemble des réels : (a) x²+6x+25=0 ; (b) 5x²-9x+4=0 ; (c) 4x²+12x+9=0

III) Étude du signe de ax²+bx+c

Cela revient à la résolution de l'inéquation ax²+bx+c>0 dans l'ensemble des réels.

A) Si Δ>0

Revenons à la forme factorisée :

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\left((x+\alpha)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\cdot\left((x+\alpha)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\cdot\left(\left(x+\alpha-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(x+\alpha+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$$

Ceci peut simplement s'écrire ax²+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) où x_1 et x_2 sont les deux racines.

Nous allons faire un tableau de signe (nous choisissons x_1<x_2) :

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
(x-x_1)	-	+	+
(x-x_2)	-	-	+
a(x-x_1)(x-x_2)	+a	-a	+a

Nous en déduisons que le signe de ax²+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de -a à l'intérieur des racines.

B) Si Δ=0

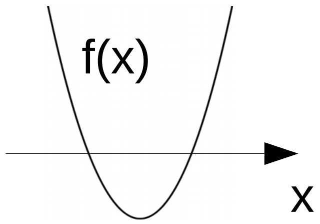
Le système factorisé revient à $a(x-x_m)^2$ qui est toujours du signe de a et qui ne s'annule qu'en x_m .

C) Si Δ<0

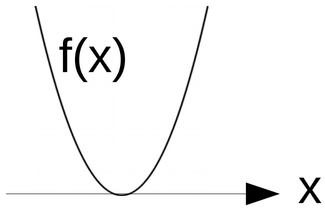
$a\cdot x^2+b\,x+c=a\left((x+\alpha)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left((x+\alpha)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ est du signe de a car l'intérieur de la grosse parenthèse est toujours positif.

D) Résumé du signe de $f(x)=ax^2+bx+c=0$ (à savoir)

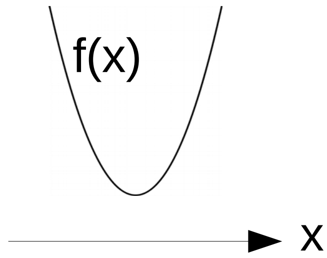
Suivant où se trouve l'axe des abscisses, nous voyons que nous avons trois possibilités :



le signe de f(x) est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de -a à l'intérieur des racines.



f(x) est toujours du signe de a et s'annule en x_m .



f(x) est toujours du signe de a.

<u>Exemples :</u> donnez les signes de (a) x²+6x+25 ; (b) 5x²-9x+4 ; (c) 4x²+12x+9 en fonction de x.

E) Exercices

Donner le signe des fonctions suivantes en fonction de x :

f(x)=13x²+4x+1 g(x)=-5x²+9x+6 h(x)=-x²+5x-8 u(x)=x²-9 v(x)=x²+16

IV) Résolution de l'équation ax²+bx+c=0 dans l'ensemble des complexes

Comme nous conservons toujours les coefficients réels, il n'y a qu'un changement possible, quand Δ<0 car on pourra écrire $\Delta=\left(j\sqrt{|\Delta|}\right)^2$ avec $|\Delta|=-\Delta$. Ceci donne :

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\left((x+\alpha)^2-\left(j\sqrt{|\Delta|}\right)^2\right)=a\cdot\left(\left(x+\alpha-j\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\cdot\left(x+\alpha+j\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right)$$

Ceci donne alors deux solutions : $S=\left\{x_1=\frac{-b-j\sqrt{|\Delta|}}{2a},x_2=\frac{-b+j\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right\}$

<u>Remarque</u> : dans ce cas, si on demande l'étude signe, dans $\mathbb{R}$, il est constant, c'est à dire celui du coefficient de x². Les racines complexes n'interviennent pas du tout.

A) Exemples

Résoudre dans l'ensemble des complexes les fonctions résolues précédemment : (a) x²+6x+25=0 ; (b) 5x²-9x+4=0 ; (c) 4x²+12x+9=0

B) Exercices à faire pour s'entrainer

Trouvez les racines dans l'ensemble des complexes et faites l'étude de signe sur l'ensemble des réels pour les fonctions suivantes :

g(x)=2x²-5x+7 ; k(x)=x-3x²+1

Tracer rapidement les graphes des fonctions suivantes :

$f(x)=x^2+4x-12=0$; $h(x)=-x^2+6x-9$; $l(x)=-3x^2+8x-6$

Vérifiez sur les graphes le signe et les racines.

II) Dérivées

I) Pour la semaine

Faire le QCM sur les dérivées

1 Les dérivées

I) Notion de dérivée

A) Valeur dérivée : tangente à la courbe en un point

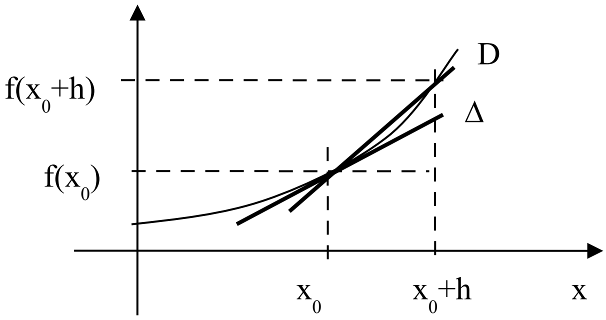


Figure 1: sécante (D) et tangente (Δ) en x_0

Soit une fonction f(x) et D la droite qui passe par les points de la courbe représentative de f qui ont pour abscisse x_0 et x_0+h (h>0 ou h<0).

La pente de la droite D est : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Plus h devient petit, plus la droite D se rapproche de Δ la droite tangente à la courbe représentative de f en x_0. La pente de la droite Δ est **le nombre dérivé** de la fonction f(x) en x_0.

B) Fonction dérivée

On appelle **fonction dérivée** de f(x) la fonction notée **f '(x)** qui pour chaque x donne le nombre dérivé. La fonction dérivée s'écrit : $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Si ce nombre existe, alors f est dérivable en x_0.

f'(x_0) est la dérivée de f en x_0, elle correspond à la pente de Δ la tangente à la courbe de f(x) en x_0.

On ne peut étudier cette limite que si f est continue en x_0. **f n'est dérivable en x_0 que si elle est continue en x_0 .**

Notation de la dérivée (ou différentielle) : autour de x_0, la pente de la tangente qui est par définition $f'(x_0)$ est comme celle de toute droite $f'(x_0)=\frac{\Delta Y}{\Delta X}$. Une variation (un accroissement) Δx autour de x_0, en X correspond à une variation (un accroissement) $\Delta f(x)$ en Y. Ce qui donne $f'(x_0)=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. En faisant tendre cet accroissement vers 0, $\Delta x \Rightarrow dx$ et $\Delta f(x) \Rightarrow df(x)$, on obtient :

$f'(x_0)=\frac{d(f(x))}{dx}$ en x=x_0, on encore $f'(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)$.

Cette formule correspond à la notation différentielle de la dérivée.

Pour écrire la fonction dérivée on peut utiliser les **notations f'(x) ou** $\frac{df(x)}{dx}$ **.** La seconde notation est plus lourde mais fait explicitement apparaître la variable (ici x) par rapport à laquelle est prise la dérivée (ce qui est indispensable dans le cas de fonction à plusieurs variables.

De même on dit indifféremment « f différentiable en x_0 » et « f dérivable en x_0 »

C) Fonction dérivée et sens de variation

Si la valeur de la dérivée d'une fonction en x_0 est positive, c'est que la valeur de f(x) augmente quand x augmente autour de x_0.

Ainsi, si la dérivée d'une fonction est positive sur un intervalle, cette fonction est croissante sur ce même intervalle. Inversement, si elle est négative, elle est décroissante.

Lorsque le nombre dérivé est nul en un point, la courbe admet une tangente horizontale en ce point (pas de variation de f(x) pour une variation autour de x).

D) Dérivabilité, dérivée à gauche, dérivée à droite

Typiquement, une fonction est dérivable si elle ne présente pas « d'aspérité », de rupture de pente ni de partie « verticale ».

Une fonction qui n'est pas continue en un point n'y est pas dérivable : comme la fonction fait un saut, on ne peut pas définir de tangente, la pente de la sécante (la droite D de la figure 1) tend vers l'infini (la pente de la courbe est verticale).

Dans le cas de fonction non continue, ou à rupture de pente on définit :

- la dérivée à droite en x_0 de f : $f'(x_0^+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- la dérivée à gauche en x_0 de f. : $f'(x_0^-)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Alors, il y a une tangente à gauche et une tangente à droite différentes, la pente en $x_{0\,n'}$est pas définie, la fonction n'est pas dérivable. Si la fonction est dérivable, la dérivée à droite et la dérivée à gauche sont égales.

Remarque : si ces deux limites sont égales, alors, il n'y a pas de rupture de pente. La valeur de ce nombre est simplement $f(x_0)$.

E) Dérivée logarithmique

On s'intéresse ici à la variation relative de f(x).

La dérivée logarithmique de f(x) est : $\frac{\mathrm{f}'(x)}{f(x)}$. On montre qu'on peut l'écrire :

$\frac{\mathrm{f}'(x)}{f(x)}=\frac{d\ln(f(x))}{dx}$.

Ainsi à partir de $f\ '(x_0)\ dx=d(f(x))$, l'accroissement relatif s'écrit : $\frac{d(f(x))}{f(x_0)}=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\ dx$ où

$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ est la valeur de la dérivée logarithmique en x_0.

La dérivée logarithmique est utilisée en physique pour le calcul des incertitudes.

II) Propriétés de la dérivée (à savoir)

A) Linéarité

Pour $a\in\mathbb{C}$, $(a\,f)'=a\,f'$ ou $\frac{d\ a\,f(x)}{dx}=a\frac{df(x)}{dx}$

et : $(f+g)'=f'+g'$ ou $\frac{d\ (f(x)+g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$

B) Produit

$(fg)'=f'g+fg'$ ou $\frac{d\,(f(x)g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x)}{dx}$

C) Quotient

$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ ou $\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx}=\frac{\frac{df(x)}{dx}g(x)-f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}$

La notation différentielle est franchement lourde !!

Pour l’inverse on obtient avec f(x)=1, fonction constante : $\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$

D) Fonction composée (très important)

$(u\circ v(x))'=v'(x)\cdot(u'\circ v(x))$ ou $\frac{d\,(u(v(x)))}{dx}=\frac{d(u(v))}{dv}\cdot\frac{d(v(x))}{dx}=\frac{d(u)}{dv}\cdot\frac{d(v)}{dx}$

ou $(u(v(x)))'=v'(x)\cdot(u'(v(x)))$

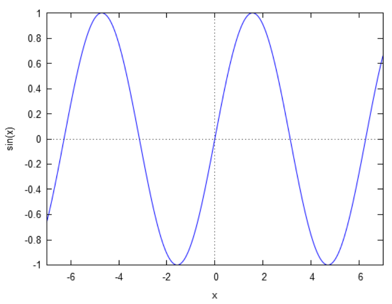
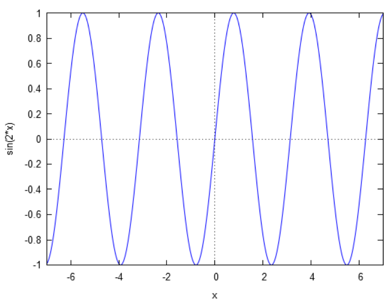
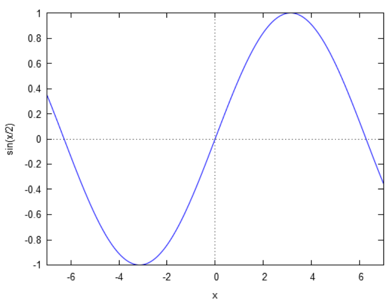
La notation différentielle est plus simple.

<u>Exemple</u> : $g(t)=\cos(\omega t+\varphi)$ avec $g(t)=u(v(t))=u\circ v(t)$, $v(t)=(\omega t+\varphi)$, $u(v)=\cos(v)$

$(g(t))'=(u\circ v(t))'=v'(t)\cdot(u'\circ v(t))=\omega\cdot(-\sin(\omega t+\varphi))$

$\frac{d(g(t))}{dt}=\frac{d(\cos(v))}{dv}\cdot\frac{d(v(t))}{dt}=-\sin(v)\cdot\omega=-\omega\sin(\omega t+\varphi)$

1. Exemples simples et visibles :

f(x)=sin(x) => f'(x)=cos(x)	g(x)=sin(2x) => g'(x)=2cos(2x)	h(x)=sin(x/2) => h'(x)=cos(x/2)/2
		

Nous pouvons bien vérifier que plus ω est important dans $\cos(\omega x)$ plus la pente est importante. La pente de g est deux fois plus importante que celle de f et celle de h est deux fois moins importante que celle de f.

III) <u>Dérivées des fonctions usuelles</u>

À savoir PAR CŒUR celles qui ne sont pas grisées, **il n’y en a que cinq !**

Fonction	Dérivée	Fonction réciproque	Dérivée
x^α , $\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^{1/\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}x^{(1/\alpha)-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$asin(x)=\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$acos(x)=\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$atan(x)=\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$cotan(x)=1/\tan(x)$	$-1-cotan^2(x)=-1/\sin^2(x)$		
$\ln(x)$	$1/x$	e^x	e^x
$\log_{10}(x)$	$\frac{1}{\ln(10)\cdot x}$	$10^x=e^{\ln(10)x}$	$\ln(10)\ 10^x$
$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)=\frac{e^x+e^x}{2}$	$\text{argsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$ch(x)=\cosh(x)$	$sh(x)=\sinh(x)$	$\text{argch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$th(x)$	$1\text{-th}^2(x)=\frac{1}{\text{ch}^2(x)}$	$\text{argth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth(x)=1/th(x)$	$1-\coth^2(x)=-1/sh^2(x)$		

En utilisant les fonctions composées on obtient pour les dérivées qui sont **à savoir par cœur**

$(f^\alpha)'=\alpha(f)'f^{\alpha-1}$ $\alpha\in\mathbb{R}$; $(\sin(f))'=f'\cos(f)$; $(\cos(f))'=-f'\sin(f)$; $(e^f)'=f'e^f$;

$$(\ln(f))'=\frac{f'}{f}$$

IV) Exercices

A) Exercices sur le cours

À partir de la définition, trouver la dérivée de x^2 .

Réponse $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$(x^2)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2hx-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

B) Exercices sur le cours

À partir de la définition, trouver la dérivée de $\cos(x)$ en utilisant la formule : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

Réponse $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$(\cos(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}$$

Quand h → 0 on peut approximer : $\cos(h)\approx 1;\sin(h)\approx h$ **(** ou $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$ **)**

$$(\cos(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)-\sin(x)h-\cos(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin(x)h}{h}=-\sin(x)$$

C) Exercices d’application

Dérivez des fonctions suivantes :

$f(x)=5x^4+3x^2-6x+1$ **;** $f(x)=\sin(4(x-9))$ **;** $f(x)=(1+x^2)^5$ **;** $f(t)=\exp(-t/\tau)\cdot\sin(\omega t+\varphi)$ **;**

$f(x)=\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{2x}$ **;** $f(x)=\frac{3x+2}{x^2-3}$

2 Comportement local, développements limités

La comparaison asymptotique consiste à étudier le comportement d’une fonction au voisinage d’un point (localement) comme dans ce chapitre, ou en l’infini comme dans le chapitre suivant, en regard du comportement d’une autre fonction réputée "simple" et "connue".

I) Comportement local, comparaison de fonctions

A) Voisinage de a

Voisinage de a : c’est un intervalle $]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$ avec un réel ε>0.

B) Fonctions équivalentes

On dit que f est équivalente à g quand t → a s’il existe un voisinage de a $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ tel que :

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=1$$

Notation : f ~g quand on tend vers a ou encore $f\underset{a}{\sim}g$

Il est important de dire en quel point on travaille car cette propriété n’est pas vraie ailleurs (à priori).

C) Fonctions négligeables

On dit que f est négligeable par rapport à g quand t → a s’il existe un voisinage de a $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ tel que : $\lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=0$.

Notation : $f=o(g)$: f est un petit « o » de g autour de a est équivalent à f<<g autour de a.

Ceci peut aussi s'écrire comme ça : f(t)=ε(t)g(t) avec $\lim_{t \to a} \epsilon(t)=0$

Exemple : $f(x)=x^{n+1}$ est négligeable devant $g(x)=x^n$ quand x → 0

Car $\lim_{x \to 0} \frac{x^{n+1}}{x^n}=\lim_{x \to 0} x=0$;

On écrit $f=o(x^n)$ ou encore $f(x)=x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{t \to a} \epsilon(t)=0$

II) Taylor-Young

A) Formule de Taylor-Young (Développement Limité ou DL autour de a)

Soit f(t) une fonction définie sur un intervalle I de ℝ, soit a un point de I. On suppose que f est au moins n fois dérivable en a. Alors quand t→ a

$$f(t)=f(a)+f'(a)(t-a)+\frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n+o\left[(t-a)^n\right]$$

B) Approximations affines (équation de la tangente) : développements limités d'ordre 1

En tronquant le DL à l'ordre 1 on obtient l'équation d'une droite d(t) ou **approximation affine** :

$$d(t)=f(a)+f'(a)(t-a)$$

d(t) passe par le point $(a, f(a))$ car $d(a)=f(a)$, et sa pente vaut $f'(a)$. Cela correspond à l'équation de la tangente à la courbe représentative de f(t).

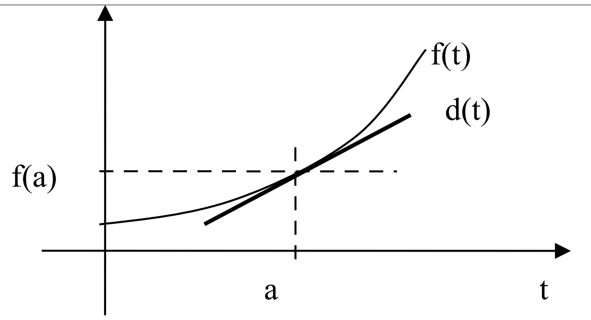


Figure 1: tangente d(t) en t=a

C) Exercice avec les Taylor Young (TY)

Soit la fonction suivante : $f(x)=\cos(\exp(x)-1)$. Nous allons l'étudier autour de 0.

Calculez les trois premières dérivées de f : f', f'' et f'''=$f^{(3)}$.

$$f'(x)=f^{(1)}(x)=-e^x\sin(e^x-1)$$
$$f''(x)=f^{(2)}(x)=-e^x\sin(e^x-1)-e^{2x}\cos(e^x-1)$$
$$f'''(x)=f^{(3)}(x)=e^{3x}\sin(e^x-1)-e^x\sin(e^x-1)-3e^{2x}\cos(e^x-1)$$

Calculez : $f(0)=$ $f'(0)=$

$f''(0)=$ $f'''(0)=$

Utilisez TY autour de 0 : $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+o(x^3)$

pour trouver : $f(x)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$

Calculer à l'ordre 1, 2 puis 3, une approximation de f(0,2), f(-0,2), f(0,1) et f(-0,01). Comparez la précision des résultats.

	0,2	-0,2	0,1	-0,01
f(x) à l'ordre 1				
f(x) à l'ordre 2				
f(x) à l'ordre 3				
Valeur exacte de f(x)				

III) Développements limités (DL)

A) *Développement limité autour de 0*

Soit f(t) une fonction définie sur un intervalle I de ℝ. On suppose que f est au moins n fois dérivable en 0. Alors quand t→ 0

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{f''(0)}{2!}t^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n+o(t^n)$$

B) *Exercice : DL de* $\cos(x)$ *autour 0*

Calculez les quatre premières dérivées de $\cos(x)$:

$(cos(x))' =$;$(cos(x))'' =$;$(cos(x))^{(3)} =$; $(cos(x))^{(4)} =$

et leurs valeurs en 0, en déduire le DL de $\cos(x)$ à l'ordre 4:

$$\cos(t)=\cos(0)+(\cos(0))'t+\frac{(\cos(0))''}{2!}t^2+\frac{(\cos(0))^{(3)}}{3!}t^3+\frac{(\cos(0))^{(4)}}{4!}t^4+o(t^4)$$

C) *Développement limité usuels autour de 0*

$$\boxed{e^x=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}+o(x^n)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+...}$$

$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-...=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}+o(x^{2n+1})}$; sin(x) est une fonction impaire

$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-...=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^1 x^{2i}}{(2i)!}+o(x^{2n})}$; cos(x) est une fonction paire

$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$$

avec $sh(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; $ch(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ on a

$$sh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}...+\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}+o(x^{2i+1})$$

$$ch(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}...+\frac{x^{2i}}{(2i)!}+o(x^{2i})$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)x^2}{2}+\frac{a(a-1)(a-2)x^3}{6}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{m}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(a-i)}{n!}x^n+o(x^m)$$

Avec α= -1 cela donne :

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$(-1)^n$ vaut 1 si n est pair, -1 si n est impair.

Avec α=1/2 cela donne :

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+...$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...-\frac{(-1)^n}{n}x^n+o(x^n)$$ (primitive de $\frac{1}{1+x}$)

En posant $t=(1+x)$ et donc $x=(t-1)$ on a :

$$\ln(t)=(t-1)-\frac{(t-1)^2}{2}+\frac{(t-1)^3}{3}+...-\frac{(-1)^n}{n}(t-1)^n+o((t-1)^n)$$

Cela correspond à un développement de $\ln(t)$ autour de $t_0 = 1$;

D) *Illustration graphique*

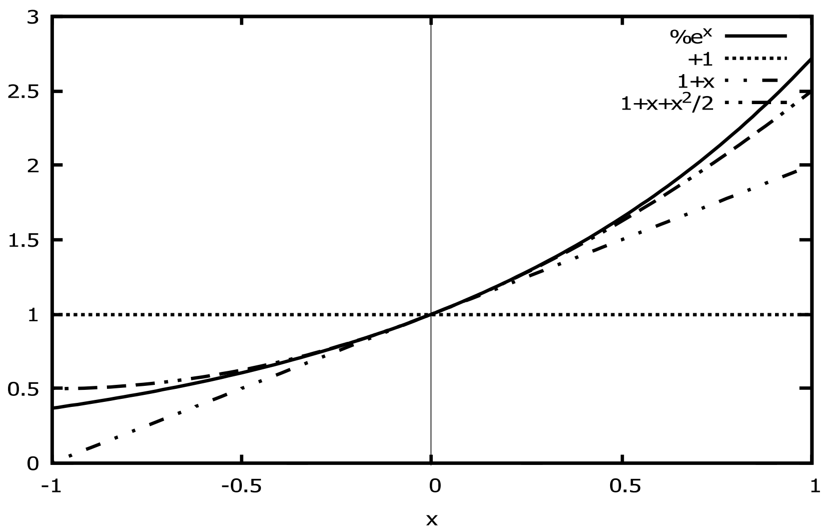


Figure 2: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

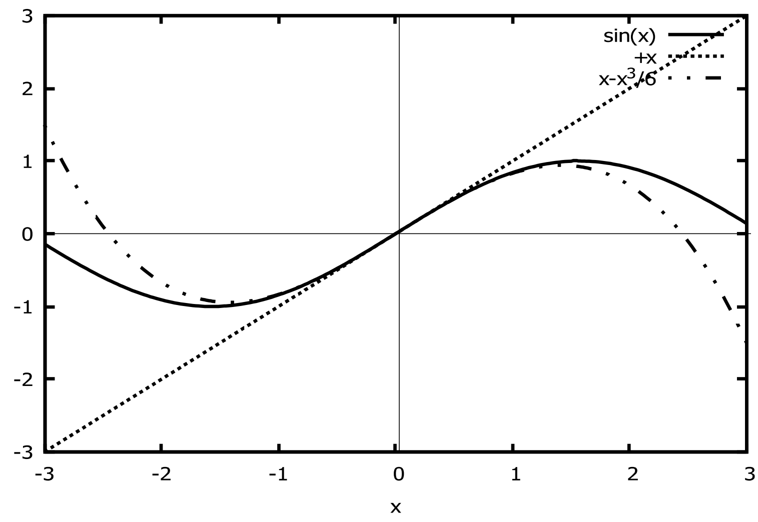


Figure 3: $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

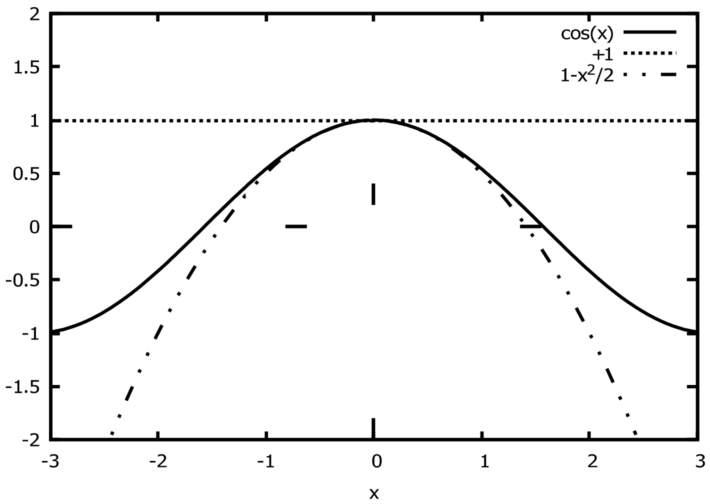


Figure 4: $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$

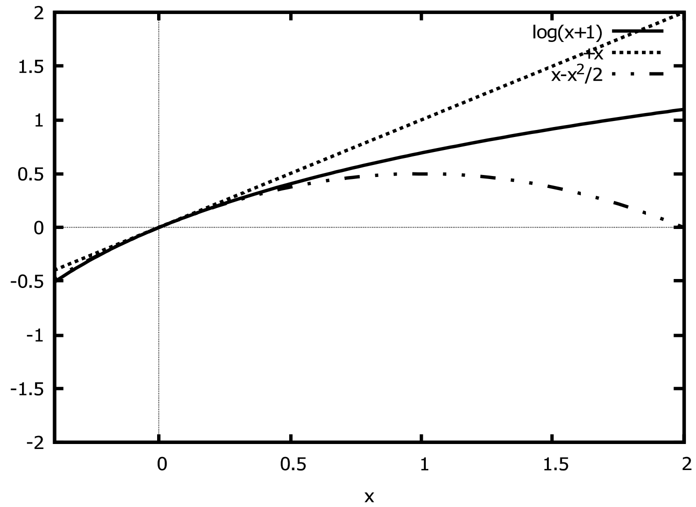


Figure 5: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

E) Exercice : DL de fonction composée (ancien DS)

On cherche le DL à l'ordre 2 autour de 0 de la fonction $f(x)=\frac{1}{2+x}$.

On peut écrire $f(x)=\frac{1}{2(1+x/2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x/2}$. En posant $X=\frac{x}{2}$ on a : $\frac{1}{1+x/2}=\frac{1}{1+X}$.

On utilise alors le DL : $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+o(x^n)$ avec la variable X

Soit : $\frac{1}{1+X}=1-X+X^2+o(X^2)$, en remplaçant X on a : $\frac{1}{1+x/2}=1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$

ce qui donne : $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-x/2+(x/2)^2+o(x^2)\right)=\frac{1}{2}-x/4+x^2/8+o(x^2)$.

IV) Propriétés des développements limités*

A) DL et parité

Si f est une fonction paire alors le DL de f en 0 ne contient que des termes à exposant pair.
Si f est impaire alors le DL de f en 0 ne contient que des termes dont les exposants sont impairs.

B) Addition et soustraction de DL.

Si f et g sont deux fonctions qui admettent un DL autour d'un même point a alors f+g (respectivement f-g) admet un DL autour de a et ce DL sera la somme (respectivement la différence) des deux DL.

Pour que tous les coefficients calculés aient un sens, il faut que f et g soient développées au même ordre n.

C) Multiplication de DL.

Si f et g sont deux fonctions qui admettent un DL autour d'un même point x_0 alors f.g admet un DL autour de x_0 et ce DL sera le produit des deux DL. Pour que **tous** les coefficients calculés aient un **sens**, il faut que f et g soient développées au **même** ordre n. Le DL exprimé sera **correct** jusqu'au rang n.

D) Division de DL.

Si f et g sont deux fonctions qui admettent un DL autour d'un même point x_0 alors f/g admet un DL autour de x_0 si $g(x_0)\neq 0$ et ce DL sera la division des deux DL suivant les puissances croissantes (la méthode qui donne un reste sans petit exposant). Avant de faire le calcul, il faut savoir jusqu'à quel terme on va. Pour que **tous** les coefficients calculés aient un **sens**, il faut que f et g soient développées au **même** ordre n. Le DL exprimé sera **correct** jusqu'au rang n.

E) Composition de DL.

Si f admet un DL au voisinage de y_0 et g au voisinage de x_0 avec $g(x_0)=y_0$ alors fog admet un DL au voisinage de x_0 qui sera la composée des deux DL.

F) Dérivation de DL.

Si f admet un DL en x_0 alors f' n'admet pas toujours un DL en x_0. Cela se produit quand f n'est pas indéfiniment dérivable (dans le cas où la dérivée f' est discontinue ou tend vers l'infinie).

Par contre si f est infiniment dérivable, f et f' admettent un DL d'ordre infini. Le DL de f' est la dérivée du DL de f.

G) Intégration de DL.

Si f' admet un DL en x_0 alors f admet aussi un DL en x_0 qui sera la primitive du premier DL qui prendra la bonne valeur en x0.

<u>Exemples</u> : Les DL de sin x et cos x, de sh x et ch x. De même comparer la dérivée du DL de e^x avec lui-même.

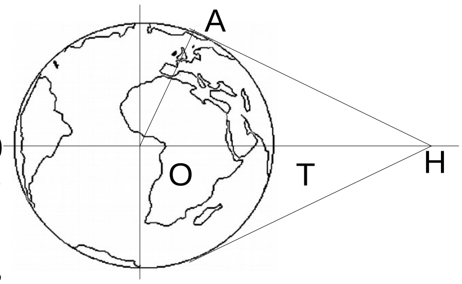
H) Unicité des DL.

En un point, pour une fonction, il existe au maximum un DL d'ordre n.

On peut trouver plusieurs fonctions qui ont le même DL d'ordre n en un point (même comportement local).

V) Exemples

A) Corde tendue sur la terre. *



Imaginons que nous mettons autour de la terre (R=6400km) une corde qui fasse un mètre de plus que le périmètre de la terre (considérée complètement sphérique).

On tire un point de la corde pour l'éloigner de la terre. Nous allons calculer la distance HT : à quelle distance H se trouve de la surface de la terre ?

Si on appelle α l'angle AOH au point O.

1) Exprimer $\tan(\alpha)$. En déduire AH en fonction de $\tan(\alpha)$ et R.

2) Exprimez la longueur L de l'arc AT

3) La longueur supplémentaire S est égale à 2 fois la différence (AH-L) (2 fois par raison de symétrie). Exprimez S en fonction de α et R ?

4) Exprimez OH en fonction de α et R, en déduire HT.

1. Résolution *

Comme $\tan(\alpha)=\frac{AH}{R}$, pour trouver α nous allons utiliser le développement limité $\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^6)$. On suppose que l'angle α est très petit.

Pour la longueur L de l'arc AT, on a : $L=\alpha R$ et la longueur supplémentaire $S=2(AH-L)$

=> $S=2(R\tan(\alpha)-\alpha R)=2R(\tan(\alpha)-\alpha)$

Pouvons-nous prendre l'ordre 1 pour le DL de tan ? Pourquoi ?

On s'arrêtera à l'ordre 3 : $S=2R\left((\alpha+\frac{\alpha^3}{3})-\alpha\right)$

On en déduit α , (α =0,0061655 rad), puis OH par $\cos(\alpha)=\frac{R}{OH}$

En déduire TH (TH=121,6 m)

<u>Remarques :</u> sans DL, on ne peut trouver facilement α (à moins de faire par exemple une résolution par dichotomie).

B) Calculs de DL*

Trouvez l'ordre 5 du DL en 0 de tan(x).

Calculer le DL en 0 d'ordre 3 de $\sqrt[3]{1+x}$ et de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Conclure du précédent calcul l'allure en 0 de $3\sqrt[3]{1+x}+\frac{2}{\sqrt{1+x}}-5$

C) Limites (à faire)

On peut calculer les limites grâce aux DL. Pour cela il suffit d'aller jusqu'au premier ordre où il reste un terme.

Avec les DL, calculez les limites en 0 de $f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}$; $g(x)=\frac{\sin(x)-x}{x^3}$; $h(x)=\frac{e^x-\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$.

<u>Application à la physique.</u>

La résistance thermique d'un tuyau (entre la température interne et l'externe) est donnée par $R_{th}=\frac{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi\cdot k\cdot l}$. Si on considère l'épaisseur e=r_i-r_e presque nulle devant le rayon R (r_i ou r_e), que donne cette formule. Faites un DL d'ordre 1 et exprimez le résultat en fonction de la surface du tuyau. Connaissez-vous déjà cette formule ?

VI) À faire pour le TD suivant

Donner le DL d'ordre 3 de $\sqrt[3]{1+x}=$

Calculer : $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\cos(x)-1}$

III) Les intégrales

1 Présentation

I) Primitive

Trouver une primitive d'une fonction f, c'est trouver une fonction g telle que g'(x)=f(x).

Remarques : 1) pour toute constante a, (g(x)+a)'=g'(x)=f(x) donc une primitive est définie à une constante près pour tout $x \in Df$.

2) si h et g sont 2 primitives de f, alors (h-g)'=f-f=0 $\Rightarrow$ (h-g) est la fonction constante $\Rightarrow$ h(x)=g(x)+a ; a constante.

3) le 1) a montré g primitive $\Rightarrow$ h=g+a primitive et le 2) g et h primitives $\Rightarrow$ h=g+a (a constante).

Pour trouver les primitives, on fait l'inverse de la dérivation. Plusieurs techniques sont possibles, nous les étudierons dans la suite de ce chapitre.

A) Intégrale

Si g'=f, On note : $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = [g(x)]_a^b$ l'intégrale de f de a à b. Ceci donne $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et la relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = g(c) - g(a) + g(b) - g(c)$

$g(x) = \int_a^x f(X)dX$ est la primitive de f qui s'annule en a.

B) Surface

Si a<b, $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = [g(x)]_a^b$ est la surface entre les droites d'équation y=0, x=a, x=b et la courbe d'équation y=f(x). Les surfaces en dessous la droite y=0 sont comptées négativement.

<u>démonstration :</u> Notons F(X) la surface entre les droites d'équation y=0, x=a, x=X et la courbe d'équation y=f(x) (a>X et f continue).

On a F(a)=0. F(X+h)-F(X) est a surface entre les droites d'équation y=0, x=X, x=X+h et la courbe d'équation y=f(x) (h>0). Si h est assez petit, on peut considérer entre X et X+h f(x)=f(X) Ceci donne F(X+h)-F(X)=hf(X) d'où $\lim_{h \to 0} \frac{F(X+h) - F(X)}{h} = f(X)$

Donc F(X) est la primitive de f qui s'annule en a $\Rightarrow$ F(x)=g(x)-g(a).

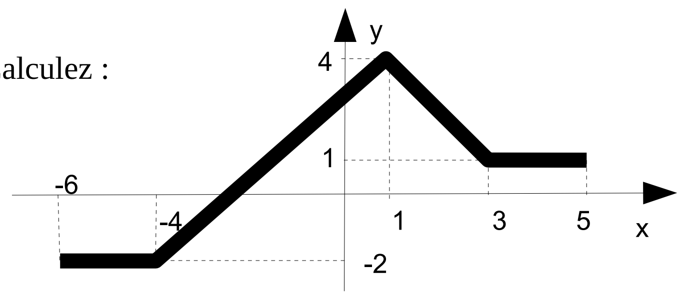
Ceci implique : toute fonction continue (par morceau) sur un intervalle est intégrable sur I.

C) Exercices d'application directe :

Voici est le graphe de y=f(x) dans l'intervalle [-6 , 5] : Calculez :

$\int_{-6}^{-4} f(x)dx$; $\int_{-4}^{1} f(x)dx$; $\int_{1}^{3} f(x)dx$

$\int_{3}^{5} f(x)dx$; en déduire $\int_{-6}^{5} f(x)dx$;



Tracer une fonction sinusoïdale de période T d'amplitude maximum A. Calculer graphiquement l'intégrale de cette fonction sur l'intervalle [-T/2;T/2].

Tracer une fonction créneau de période T basculant entre A et 0 (f(t)=A si $t\in[0;T/2[$ et f(t)=0 si $t\in[T/2,T[$). Calculer graphiquement l'intégrale de cette fonction sur l'intervalle [0;T/2], [T/2;T], [0;T] et finalement sur [0,t] avec $t\in[0;T]$.

Trouver graphiquement $\int_0^x t\cdot dt$

1. Propriétés de l'intégrale

Linéarité : $\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$

Théorème de la moyenne : si *f* est continue sur [a ;b], il existe x∈[a ;b] tel que $f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^a f(t)dt$.

Cette valeur est appelée la valeur moyenne - le nombre (b-a) est la longueur du segment [ab] -. On s'en sert pour la valeur efficace en électricité :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right)dt=\frac{1}{2T}\left[t+\frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{T}t\right]_0^T=\frac{1}{2}$$

II) Premières Méthodes de Calcul

1. Fonctions polynômes

La dérivée de x^n n∈3 est nx^{n-1} donc une primitive de x^n n∈3\{-1} est $x^{n+1}/(n+1)$. Si n=-1 une primitive est ln(x).

Exemples : $\int_1^2 (2x^2+4x+5/x^2)dx=[2x^3/3+2x^2-5/x]_1^2=\frac{2}{3}+2+5=\frac{23}{3}$ (en donner d'autres)

2. Dérivées simples

Il suffit de connaître une fonction g tel que g'=f. Pour ceci il faut connaître ses fonctions dérivées.

Exemples : $\int_0^\pi \cos x dx=[-\sin x]_0^\pi=0$; $\int_0^1 e^x dx=[e^x]_0^1=e-1$

Si f est la fonction donnée par	sur l'intervalle	Elle admet une primitive F
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{R}, n\neq-1$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x)=e^x$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=e^x$
$f(x)=1/x$	$]0;+\infty[$	$F(x)=\ln(x)$
$f(x)=\sin(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=-\cos(x)$
$f(x)=\cos(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=\sin(x)$
$f(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$](n-1/2)\pi;(n+1/2)\pi[$ $N\in\mathbb{Z}$	$F(x)=\tan(x)$

B) Exercice

calculer $A=\int_1^2\left(x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$; $B=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{(x)}}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$

1. Fonctions composées connues

On utilise surtout (ln |u|)'=u'/u : $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x}dx=[\ln|x^2+x|]_2^3=\ln(12)-\ln(6)=\ln 2$

Parfois, on peut en trouver d'autres : $\int_0^1 2t\sin(t^2)dt=\left[-\cos t^2\right]_0^1$ … C'est à vous de le remarquer.(Voir changement de variable)

Si f est la fonction donnée par	sur l'intervalle	Elle admet une primitive F
$f(x)=g'(x)(g(x))^n, n\in\mathbb{R}, n\neq -1$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=\frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}$
$f(x)=g'(x)e^{g(x)}$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=e^{g(x)}$
$f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$	$F(x)=\ln(\lvert g(x)\rvert)$
$f(x)=g'(x)\sin(g(x))$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=-\cos(g(x))$
$f(x)=g'(x)\cos(g(x))$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=\sin(g(x))$

Exemples d'application sur WIMS : http://wims.unice.fr/wims/

On pourra rechercher « calcul intégral » comme « activité WIMS », puis essayer les Qizz d'intégration sin/cos2 et les divers exercices de terminale.

2 Intégration par partie

Lorsque que les méthodes très simples ne marchent pas, on peut parfois utiliser la méthode dite « intégration par partie ». La base de cette méthode est la formule (uv)'=u'v+uv' ≡ u'v=(uv)'-uv'. Cette méthode est intéressante lorsque que uv' est plus facile à intégrer que u'v : $\int_a^b u'v dx=\int_a^b ((uv)'-uv')dx=\int_a^b (uv)dx-\int_a^b uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b uv'dx$ 1

Exemples :

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx=[x.\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x dx=0-[-\cos x]_0^{\pi}=-1-1=-2$$

Pour faire cette intégration, nous avons fait une intégration par partie. La présentation du choix des deux parties est indispensable pour que l'intégration se passe bien (au moins dans un premier temps). Voici la présentation que je propose :

$$\begin{cases} u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1 \\ v'(x)=\cos(x)\Leftarrow v(x)=\sin(x)\end{cases}$$

Remarquez bien le sens des doubles flèches : de la fonction vers sa dérivée. En effet, dans ce sens, on n'a de choix alors que dans l'autre, on le fait à une constante près.

Pourquoi ce choix a-t-il été fait ?

On regarde les deux parties. La première, x, donne 1 si on la dérive et x²/2 si on l'intègre. La seconde, cos(x) donne du sin(x) dans les deux cas (au signe près). On a donc choisi ce qui donnera le résultat le plus simple : dériver x et intégrer sin(x).

$$\int_1^2 \ln(t)t^4 dt=\left[\ln(t)t^5/5\right]_1^2-\int_1^2 t^4/5\,dt=\frac{32\ln 2}{5}-\left[t^5/25\right]_1^2=\frac{160\ln 2}{25}-\frac{32}{25}+\frac{1}{25}=\frac{160\ln 2-31}{25}$$

Pourquoi ce choix ?

Simplement, car on ne sait pas (encore) intégrer ln(t).

$$\int_{1/4}^{1/2} argth(x)dx=[x.argth(x)]_{1/4}^{1/2}-\int_{1/4}^{1/2}\frac{x}{1-x^2}dx=[x.argth(x)]_{1/4}^{1/2}+\frac{1}{2}\left[\ln\lvert 1-x^2\rvert\right]_{1/4}^{1/2}=argth\frac{(1/2)}{2}-argth\frac{(1/4)}{4}+\ln(2)-\ln\frac{(5)}{2}$$

1. Comment choisir la fonction à dériver : alpes

Un moyen mnémotechnique pour le choix de la fonction à dériver dans une intégration par parties : ALPES

Dans l'ordre pour les fonctions à dériver on choisit :

A : pour les fonctions Arc, arsin, arcos, arctan, …

L : pour les fonctions Log, ln ...

P : pour les fonctions polynômes et fractions rationnelles ...

E : pour les fonctions exponentielles ...

S : pour les fonctions sinus, cosinus, sinh, cosh, …

En fait, on dérive en priorités les fonctions les plus difficiles à intégrer.

2. Exercices

$A=\int_{-1}^{1} x\cdot e^{x}\,dx \quad B=\int_{1}^{2} \ln(t)\,dt \quad C=\int_{-1}^{1} x^2\cdot e^{-x}\,dx$

3 Changement de variable

A) Présentation

Théorème : $\boxed{\int_a^b g'(x)\, fog(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy}$ Il faut que g soit continue et dérivable sur de [a ;b].

On vient de faire le changement de variable suivant : x↦y=g(x).Ceci donne avec la notation différentielle dy=g’(x)dx. On a donc remplacer g’(x)dx par dy et a **(**resp b) par g(a) (resp g(b)**)**.

Exemples : $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2\,t\sin(t^2)\,dt=\int_0^{\pi^2} \sin T\,dT=[-\cos T]_0^{\pi}=2 \leftarrow T=t^2$

$\int_0^1 \frac{2t+1}{1+(t^2+t)^2}\,dt=\int_{0^2+0}^{1^2+1} \frac{1}{1+x^2}\,dx=[\arctan x]_0^2=\arctan 2-\arctan 0=\arctan 2 \leftarrow x=t^2+t$

$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos x\;dx=\int_0^1 y^3\,dy=1/4 \leftarrow y=\sin x$

Parfois le changement se fait aussi dans l’autre sens : $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} fog(y)\,g'(y)\,dy$. Cette fois on a x=g(y), donc dx=g’(y)dy. Cette fois, il faut en plus que g soit une bijection de [α,β] vers [a ;b] avec g([a ;b])⊂[α,β].

Exemples :

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 y}\cos y\,dy=\int_0^{\pi/2} \cos^2 y\,dy=\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2y}{2}\right)dy=\left[\frac{2y+\sin y}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4} \leftarrow x=\sin y$

$\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx=\int_0^{\arg ch 2} sh^2 y\,dy=\int_0^{\arg ch 2} \frac{ch 2y-1}{2}\,dy=\left[\frac{sh 2y-2y}{4}\right]_0^{\arg ch 2}=\frac{sh(2\arg ch 2)-2\arg ch 2}{4} \leftarrow ch y=x$

$\rightarrow \frac{sh(2\ln(2+\sqrt{3}))-2\ln(2+\sqrt{3})}{4}=\frac{(2+\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{3})^{-2}}{8}-\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2}=\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2}$

$\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/3} \sin y\,dy=[-\cos y]_0^{\pi/3}=1-\sqrt{2}/2 \leftarrow x=\sin y$

L’écriture différentielle permet de faire le changement de variable plus facilement.

Attention : Ne pas oublier le changement de borne.

B) Exercices

$F=\int_{1/2}^{-1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	← utilisez le changement de variable x=cos(t)	$G=\int_0^{\sqrt[4]{3}}\frac{x\,dx}{x^4+1}$	← faîtes le changement de variable X=x².
$L=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{x^3\,dx}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$	← 2 changements de variable à faire en sin et en cos.	$H=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}$	← posez x=tan t
$Q=\int_0^1\frac{e^x\,dx}{1+e^{-x}}$	← posez u=e^x	$R=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$	← posez X=x²

C) Changement de variable et parité

Soit g : 3 → 3 ; x↦-x. $g^{-1}(x)=g(x)$ et g'(x)= -1 **(**gog(x)=g(-x)=x**)**.

1. Fonction paire

Soit *f* une fonction paire continue sur [a ;b], donc aussi sur [-b ;-a].

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} g'(x)\, fog(x)dx=\int_{-a}^{-b}-f(-x)dx=\int_{-a}^{-b}-f(x)dx=-\int_{-a}^{-b}f(x)dx=\int_{-b}^{-a}f(x)dx$$

Ceci donne si a=0 : $\int_0^b f(x)dx=\int_{-b}^0 f(x)dx$ d'où $\boxed{\int_{-b}^b f(x)dx=2\int_0^b f(x)dx}$

2. Fonction impaire

Soit *f* une fonction impaire continue sur [a ;b], donc aussi sur [-b ;-a].

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} g'(x)\, fog(x)dx=\int_{-a}^{-b}-f(-x)dx=\int_{-a}^{-b}-(-f(x))dx=-\int_{-a}^{-b}-f(x)dx=-\int_{-b}^{-a}f(x)dx$$

Ceci donne si a=0 : $\int_0^b f(x)dx=-\int_{-b}^0 f(x)dx$ d'où 2 $\boxed{\int_{-b}^b f(x)dx=0}$

Exemple : $\int_{-8}^{8} e^{x^2+\cos x}(x+\sin x)dx=0$

D) Changement de variable et périodicité

Soit *f* une fonction T périodique et g : x↦x+kT avec k∈9.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} g'(x)\, fog(x)dx=\int_{a+kT}^{b+kT} f(x+kT)dx=\int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx$$

Exemple : $\int_0^{\pi}\sin x dx=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin x dx=2$ avec k∈ℤ. Le dessin reste le même quelque soit la période, donc la surface aussi.

4 Intégrales et Fractions rationnelles

A) Rappels

1. Polynômes réels

Tous polynômes réels sont décomposable en un produit de polynômes de degrés 1 ou 2 (en polynômes irréductibles). Les polynômes de degrés 2 étant sans racines réelles.

2. Fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle se décompose toujours en sommes d'éléments simples : un polynôme et des fraction dont le dénominateur est une puissance d'un polynôme irréductible et le numérateur est de degrés strictement inférieur au polynôme irréductible du dénominateur..

B) élément de la forme $a/(x-b)^n$

La dérivée d'un quotient de la forme $a/(x-b)^n$ est $-na/(x-b)^{n+1}$. Donc si $n \neq 1$ une primitive de $a/(x-b)^n$ est $-a/[(n-1)(x-b)^{n-1}]$. Si n=1 une primitive est $a\ln|x-b|$.

C) élément de la forme $a/(x^2+b)^n$

Par un changement de variable approprié : $X=x+\beta/2$ tous les polynômes irréductibles de la forme $a/(x^2+\beta x+\chi)^n$ se transforment en $a/(X^2+b)^n$ avec b>0. En posant $\sqrt{b}Y=X$, on récupère un polynôme de la forme $(a\sqrt{b}/b^n)/(Y^2+1)^n$.

Si n=1 on reconnaît la dérivée de arctan Y. Sinon, on pose Y=tan y. $1/(Y^2+1)^n$ donne $(1+\tan^2 y)/(\tan^2 y+1)^n=\cos^{2(n-1)}y$. Cette expression est linéarisable avec les formules d'Euler et donc facilement intégrable (ou voir fin du VI).

Exemples :

$$\int_0^1 \frac{4}{(x^2+2x+3)^3}dx=\int_1^2 \frac{4}{(X^2+2)^3}dX=\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2}}{8(Y^2+1)^3}dY=\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2(Y^2+1)^3}dY=\int_{\arctan(1/\sqrt{2})}^{\arctan(\sqrt{2})} \frac{\sqrt{2}(1+\tan^2 y)}{2(\tan^2+1)^3}dy$$

$$\int_0^1 \frac{4}{(x^2+2x+3)^3}dx=\int_{\arctan(1/\sqrt{2})}^{\arctan(\sqrt{2})} \frac{\sqrt{2}(1+\tan^2 y)}{2(\tan^2 y+1)^3}dy=\int_{\arctan(1/\sqrt{2})}^{\arctan(\sqrt{2})} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos^4 y\,dy=\int_{\arctan(1/\sqrt{2})}^{\arctan(\sqrt{2})} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\cos 4y}{8}+\frac{\cos 2y}{2}+\frac{6}{8}\right)dy=$$

$$\int_0^1 \frac{4}{(x^2+2x+3)^3}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sin 4y}{32}+\frac{\sin 2y}{4}+\frac{6}{8}y\right]_{\arctan(1/\sqrt{2})}^{\arctan(\sqrt{2})}$$

Les changements de variables sont :1) $X=x+1(X^2=x^2+2x+1)$ 2) $\sqrt{2}Y=X$et 3) tan y=Y et $\cos^4 x=\cos 4x/8+\cos 2x/2+3/4$

D) élément de la forme $ax/(x^2+b)^n$

Par le même changement de variable tous les polynômes de la forme $ax/(x^2+\beta x+\chi)^n$ se transforment en $a(X-\beta/2)/(X^2-b)^n= aX/(X^2+b)^n-a\beta/2)/(X^2+b)^n$. La première partie de cette écriture est de la forme u'/u^n avec $u(X)=X^2+b$ la seconde est l'élément vue précédemment. Si n=1 la primitive est de la forme ln(u), sinon elle est de la forme $1/u^{n-1}$.

Exemple : $$\int_0^1 \frac{4x}{(x^2+2x+3)^3}dx=\int_1^2 \frac{4(X-1)}{(X^2+2)^3}dX=\int_1^2 \frac{4X}{(X^2+2)^3}dX-\int_1^2 \frac{4}{(X^2+2)^3}dX$$

$\leftarrow X=x+1(X^2=x^2+2x+1)$

$$\int_1^2 \frac{4X}{(X^2+2)^3}dX=\left[\frac{-1}{(x^2+2)^2}\right]_1^2=\frac{-1}{36}-\frac{-1}{9}=\frac{1}{12}$$

5 Intégrales et fonctions circulaires (règle de Bioche)

Le but est de trouver une primitive de fonction de la forme *f*(x)=R(cos x ;sin x) où R est une fraction rationnelle de deux variables.

A) f(-x)d(-x) inchangé

Ceci donne *f*(-x)=R(**cos x** ; - sin x).On pose t = **cos** x (cos x est invariant par $x\to -x$).

On cherche à mettre sin x en facteur au numérateur car dt = - sin x dx. Le reste, étant pair, peut s'écrire sous une forme rationnelle en cos x. On revient à une fraction rationnelle après le changement de variable.

B) f(π-x)d(π-x) inchangé

Ceci donne *f*(π-x)=R(- cos x ; **sin x**). On pose t = **sin x** (sin x est invariant par $x\to \pi-x$).

On cherche à factoriser cos x au numérateur car dt =cos x dx, le reste peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle en sin x.

C) f(π+x)d(π+x) inchangé

Ceci donne $f(\pi+x)=R(-\cos x\ ;\ -\sin x)$. On pose t = tan t (tan x est inchangé par $x\to\pi+x$). On cherche à factoriser $(1+\tan^2x)=1/\cos^2x$ au dénominateur car $dt = (1+\tan^2x)dx = dx/\cos^2 x$. Le cas échéant on pose $dx=dt/(1+t^2)$. On cherche ensuite à transformer la fonction en fonction rationnelle de tan x. N'oublions pas que $\cos^2x=1/(\tan^2x+1)$ et $\sin^2x=\tan^2x.\cos^2x=\tan^2x/(\tan^2x+1)$.

D) Si aucun des trois cas précédents ne marche

On pose $t=\tan(x/2)$. Ceci fait $dx=2dt/(1+t^2)$, $\sin x=2\tan(x/2)/\mathbf{(}1+\tan^2(x/2)\mathbf{)}$ et $\cos x=\mathbf{(}1-\tan^2(x/2)\mathbf{)}/\mathbf{(}1+\tan^2(x/2)\mathbf{)}$. Ceci donnera une fonction rationnelle en t.

E) Exemples

$$\int_0^{\pi/4} f(x)dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x dx}{2-\sin^2 x}=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{dt}{2-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{\sqrt{2}\,dT}{1-T^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}[\arg thT]_0^{1/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arg th\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi/4} g(x)dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{1}{1+t}dt=[\ln(1+t)]_{\sqrt{2}/2}^{1}=\ln(2)-\ln(1+\sqrt{2}/2)=\ln(4-2\times\sqrt{2})$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(x)dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{2\cos^2 x-1}{\tan x\cos^2 x}dx=\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{2-(1+t^2)}{(1+t^2)t}dt=\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1-t^2}{(1+t^2)t}dt=\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t}-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(x)dx=[\ln t-\ln(1+t^2)]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\ln(\sqrt{2})-\ln(1/\sqrt{2})-\ln 3+\ln\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2-\ln 3+\ln 3-\ln 2=0$$

$$\int_0^{\pi/2} i(x)dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos x}{1+\sin x}dx=\int_0^1\left(\frac{1+(1-t^2)/(1+t^2)}{1+2t/(1+t^2)}\frac{2dt}{1+t^2}\right)=\int_0^1\left(\frac{2}{1+t^2+2t}\frac{2dt}{1+t^2}\right)=\int_0^1\frac{4dt}{(1+t^2)(1+t)^2}$$

$$\int_0^{\pi/2} i(x)dx=\int_0^1\left(\frac{-2t}{1+t^2}+\frac{2}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}\right)dt=\left[-\ln(1+t^2)+2\ln(1+t)-\frac{2}{1+t}\right]_0^1=1+\ln 2$$

F) f(x) est un polynôme en sin et cos

$f(x)$ se décompose en somme de termes de la forme $\cos^n x\ .\ \sin^m x$. Il faut étudier en fonction de la parité de n et m.

1. Au moins un des deux est impair

n est impair n=2a+1 $\cos^n x\ .\ \sin^m x=\sin' x(1-\sin^2x)^a\sin^m x$ impose un changement de variable en t=sin x.

m est impair m=2a+1 $\cos^n x\ .\ \sin^m x=-\cos' x.\cos^n x(1-\cos^2x)^a$ impose un changement de variable en t=cos x.

2. Aucun des deux est impair

Nous pouvons soit linéariser soit faire une transformation en t=tan x :

$\cos^{2a}x.\sin^{2b}x=\tan^{2b}x.\cos^{2a-2b+2}x/\cos^2x=\tan' x.\tan^{2b}x./(1+\tan^2x)^{a-b+1}$. Cette dernière méthode risque de nous faire tourner en rond, elle simplifie la linéarisation mais impose une simplification de fraction rationnelle.

6 Intégrales et fonctions hyperboliques

Les méthodes sont très semblables à celles utilisées pour les fonctions circulaires.

A) fonction rationnelle en ch et sh

Le but est de trouver une primitive de fonction de la forme $f(x)=R(\mathrm{ch}\ x\ ;\mathrm{sh}\ x)$ où R est une fraction rationnelle de deux variables.

On pose la changement de variable $t=\mathrm{th}(x/2)$. Ceci donne $dx=2dt/(1-t^2)$; $\mathrm{sh}(x)=2t/(1-t^2)$ et ch(x)=(1+t²)/(1-t²). Nous aboutissons a l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Des changements de variables semblables à ceux des fonctions circulaires conduisent plus rapidement à un résultat :

$$\int_0^{\arg sh 2} \frac{ch\ x}{1+ch^2 x}dx = \int_0^{\arg sh 2} \frac{ch\ x dx}{2+sh^2 x} = \int_0^2 \frac{dt}{2+t^2} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\,dT}{2+2T^2} = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{dT}{1+T^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan T\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}$$

$$\int_0^{\arg ch 2} \frac{sh\ x}{1+ch\ x}dx = \int_1^2 \frac{1}{1+t}dt = \left[ln(1+t)\right]_1^2 = ln(3/2)$$

$$\int_{\arg th(0,1)}^{\arg th(0,9)} \frac{ch 2x}{sh\ x ch\ x}dx = \int_{\arg th(0,1)}^{\arg th(0,9)} \frac{2ch^2 x-1}{th\ x . ch^2 x}dx = \int_{0,1}^{0,9} \frac{2-1+t^2}{t(1-t^2)}dt = \int_{0,1}^{0,9} \frac{1+t^2}{t(1-t^2)}dt = \int_{0,1}^{0,9}\left(\frac{1}{t}+\frac{2t}{1-t^2}\right)dt$$

$$\int_{\arg th(0,1)}^{\arg th(0,9)} \frac{ch 2x}{sh\ x ch\ x}dx = \left[ln\,t - ln(1-t^2)\right]_{0,1}^{0,9} = ln(0,9) - ln(0,1) - ln\,0,19 + ln\,0,9 = 2\,ln 9 - ln\,1,9$$

$$\int_0^{2\arg th 0,5} \frac{1+sh\ x}{1+ch\ x}dx = \int_0^{0,5}\left(\frac{1-t^2+2t}{2}\times\frac{2\,dt}{1-t^2}\right)dt = \int_0^{0,5}\left(1+\frac{2t}{1-t^2}\right)dt = \left[t+ln(1-t^2)\right]_0^{0,5} = 0,5+ln(0,75)$$

B) polynôme en sh et ch

f(x) se décompose en somme de termes de la forme $ch^n x . sh^m x$. Il faut étudier en fonction de la parité de n et m.

1. Au moins un des deux est impair

n est impair n=2a+1 $ch^n x . sh^m x = sh'x(1+sh^2 x)^a sh^m x$ impose un changement de variable en t=sh x.

m est impair m=2a+1 $ch^n x . sh^m x = ch'x . ch^n x(ch^2 x-1)^a$ impose un changement de variable en t=ch x.

2. Aucun des deux n'est impair

On développe en utilisant les définitions de sh et ch afin d'avoir une somme de e^{nx} avec n∈9.

7 Intégrales abéliennes

A) Intégrales abéliennes de première espèce

Il s'agit d'intégrer une fonction de la forme : $R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ où R est une fraction rationnelle de deux variables avec $\frac{ax+b}{cx+d}$ irréductible.

Théorème : Le changement de variable $t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ramène le calcul à celui d'une primitive de fraction rationnelle.

Exemple : $$\int_{0,5}^{0,9} \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \int_1^3 (1+t^2)\,t\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = \int_1^3 \frac{2t^2}{(1+t^2)}dt = 2\int_1^3 1-\frac{1}{(1+t^2)}dt = 2\left[t-\arctan t\right]_1^3$$

$$t=\sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow x=\frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx=\frac{2t}{(1+t^2)^2}\ et\ \frac{1}{1-x}=1+t^2$$

B) Intégrales abéliennes de deuxième espèce

Il s'agit d'intégrer une fonction de la forme : $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ où R est une fraction rationnelle de deux variables avec ax²+bx+c>0. Il faut factoriser ax²+bx+c sous sa forme canonique : ax²+bx+c=a[**(**x+b/(2a)**)**²-b²/(4a²)+c/a].

Trois cas sont possibles, on posera toujours t=x+b/(2a) (α est réel ; α²=±[-b²/(4a²)+c/a]=±Δ/a²) :

<u>a<0 </u>: ax²+bx+c=a(t²-α²) le polynôme admet 2 racines réelles sinon il est toujours négatif. Forme :

1-X²

<u>a>0</u> : $ax^2+bx+c=a(t^2-\alpha^2)$ si $\Delta>0$. .... Forme : X^2-1

<u>a>0</u> : $ax^2+bx+c=a(t^2+\alpha^2)$ si $\Delta<0$. .... Forme : X^2+1

On retrouve les formes rappelant « ch²-sh²=1 » ou « cos²+sin²=1 » en posant $X=t/\alpha$.

<u>a<0 :</u>

<u>Forme 1-X²</u> : On reconnaît « 1-cos²=sin² » ou « 1-sin²=cos² ». On va poser X=cos y $\Rightarrow$ dX=-sin y dy ou X=sin y $\Rightarrow$ dX=cos y dy. On est souvent ramené après simplification, à poser le changement de variable « inverse », c'est à dire Y=sin y ou Y=cos y.

<u>a<0 :</u>

<u>Forme X²-1</u> : On reconnaît « ch²-1=sh² ». On va poser X=chy$\Rightarrow$ dX=shydy. Après simplification, on posera souvent le changement de variable « inverse » Y=shy.

<u>Forme X²+1</u> : On reconnaît « 1+sh²=ch² ». On va poser X=shy $\Rightarrow$ dX=chydy. Cette fois aussi, après simplification, on posera régulièrement le changement de variable « inverse » Ychy.

Exemples :

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+5}.\,dx=\int_0^1 \sqrt{(x+1)^2+4}.\,dx=\int_1^2 \sqrt{y^2+4}.\,dy=\int_{1/2}^1 2\sqrt{Y^2+1}.\,2dY=\int_{arg\,sh\,0,5}^{arg\,sh\,1} 4\sqrt{sh^2u+1}\,chudu=\int_{arg\,sh\,0,5}^{arg\,sh1} 4ch^2udu$$

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+5}.\,dx=\int_{arg\,sh\,0,5}^{arg\,sh\,1} 2(ch(2u)+1)du=[sh(2u)+2u]_{arg\,sh\,0,5}^{arg\,sh\,1}$$

Les changements de variable sont : y=x+1 ; 2Y=y ; sh u=Y. Nous pouvons continuer en remplaçant argsh par son expression logarithmique et sh par son expression exponentielle. Nous arriverions à une expression bien plus compliquée sans intérêt.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}=\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+6}}=\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(25/4-(x-1/2)^2)}}=\int_{-1,5}^{0,5} \frac{dy}{\sqrt{(25/4-y^2)}}=\int_{-0,6}^{0,2} \frac{\frac{5}{2}dY}{\frac{5}{2}\sqrt{(1-Y^2)}}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}=\int_{arcsin-0,6}^{arcsin\,0,2} \frac{cos\,u}{\sqrt{1-sin^2u}}du=\int_{arcsin-0,6}^{arcsin0,2} du=arcsin0,2-arcsin-0,6=arcsin0,2+arcsin0,6$$

Les changement de variable sont : y=x-1/2 ; y=5Y/2 ; Y=sin u :√(1-sin²u)=cos u car u est dans arcsin([-1 ;1]).

8 <u>Intégrales impropres- Intégrales généralisées</u>

A) Présentation

On pose $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ avec *f* définie et intégrable sur [a ;b[et x∈[a ;b[.

Définition : si $\lim_{x\to b} g(x)$ existe, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^x f(t)dt$ est convergente et on lui attribue la valeur $\lim_{x\to b} g(x)$.

Définition : si $\lim_{x\to b} g(x)$ n'existe pas, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^x f(t)dt$ est divergente.

Remarque : On peut prendre *f* défini sur]a ;b] et étudier la limite en a.

Exemple : $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^{+\infty}=1$

B) Exemples - Comparaisons

1. Exemples

- Étude en fonction de α∈3 des intégrales suivantes : $\int_1^x y^\alpha dy = \left[\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^x = \frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$. Cette expression admet une limite quand x tend vers l'infini si α+1<0, donc si α<-1, cette limite est –1/(α+1).

- Étude en fonction de α des intégrales suivantes : $\int_x^1 y^\alpha dy = \left[\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_x^1 = \frac{1-x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Cette expression admet une limite quand x tend vers 0 si α+1>0, c'est à dire si a>1. Cette limite est 1/(α+1).

- $\int_0^1 \ln t\, dt = [t.\ln t - t]_0^1 = -1$ est une intégrale convergente.

2. Comparaisons & Critère d'étude

<u>Théorème :</u> Soient *f* et g deux fonctions définies sur [a ;b[avec pour tout réel x de [a ;b[0≤g(x)≤ *f*(x).
Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ existe implique $\int_a^b g(t)\,dt$ existe.

Démonstration : 0< $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt \le F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. G(x) est une fonction croissante et bornée sur [a ;b[(par 0 et), $\int_a^x f(t)\,dt$ donc elle admet une limite en b.

<u>Définition et théorème</u> : si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ existe alors $\int_a^b f(t)\,dt$ existe et on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument.

<u>Théorème :</u> Soient *f* et g deux fonctions définies sur [a ;b[avec pour tout réel x de [a ;b[0≤|g(x)|≤ *f*(x).
Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ existe implique $\int_a^b g(t)\,dt$ existe et est absolument convergente.

<u>Théorème :</u> Soient *f* et g deux fonctions définies sur [a ;b[avec pour tout réel x de [a ;b[0≤*f*(x)≤g(x).
Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ non convergente implique $\int_a^b g(t)\,dt$ non convergente.

<u>Applications :</u> Ces théorèmes permettent de savoir si une intégrale est convergente ou non à partir du moment où on peut la comparer à des fonctions connues.

<u>Exemples :</u> *f*(x)=(1+cos x)/x² admet une intégrale convergente en +∞ : 0≤*f*(x)≤2/x².
g(x)=1+sin(1/x) admet une intégrale généralisée en 0 : 0≤g(x)≤2

C) Propriétés

1. Étude en l'infini

f sera une fonction positive définie et intégrable sur [a ;+∞[. Nous pouvons simplement repérer si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ existe ou non.

Il existe α < -1 tel que *f*(x)≤ $x^\alpha \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe (l'inégalité pouvant survenir qu'à partir d'un certain point x_0).

Il existe α≥-1 tel que $x^\alpha \le f(x) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ n'existe pas (l'inégalité pouvant survenir qu'à partir d'un certain point x_0).

Il existe α < -1 tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}=k \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe.

Il existe α≥-1 tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}=k \neq 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ n'existe pas.

<u>Règle de Riemman</u> : Il existe α >1 tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)=k \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe.

(on passe de iii –ou i- à v en prenant $1<a_v< -a_{iii}$.)

<u>Règle de Riemman</u> : Il existe α ≤ 1 tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)=k \neq 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge

Remarques : - pour les exemples iii et iv , on peut aussi dire $f(x)\approx x^a$ en l'infini.

- e^{-x} intégrable en +∞ et e^{-x}/x^a admet 0 comme limite en +∞. On peut l'utiliser aussi comme référence.

Exemples : $f(x)=\frac{2x^2+x+1}{x^2-x+1} \underset{+\infty}{\approx} 2 \Rightarrow \int_{10}^{+\infty} f(x)dx\ n'existe\ pas;\ g(x)=\frac{x+1}{x^3+3} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_{10}^{+\infty} g(x)dx\ exist$

<u>Théorème :</u> Si f n'est pas une fonction toujours positive (ou négative), alors l'étude de $|f|$ peut permettre de conclure quant à l'existence de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, mais pas quant à la **<u>non</u>** existence de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Exemple : $f(x)=\frac{(-1)^{E(x)}}{E(x)}\ et\ A=\int_3^{+\infty} f(x)dx$. E(x) est la partir entière de x.

$|f(x)|$ est équivalent en +∞ (et supérieur) à 1/x donc non intégrable.

Maintenant, regardons les aires des rectangles. Nous allons les regrouper deux par deux : un négatif (E(x) impair) et un positif (E(x) pair) consécutif : 2n-1 et 2n avec n<1.

$A_n=\frac{-1}{2n-1}+\frac{1}{2n}=\frac{-1}{4n^2-2n}$. On a $\frac{1}{4x^2}\le\frac{1}{4n^2}\le|A_n|=-A_n=\frac{1}{4n^2-2n}\le\frac{1}{2n^2}\le\frac{1}{2(x-1)^2}$ avec n≤x≤n+1 car $4x^2\ge4n^2\ge4n^2-2n\ge2n^2\ge2(x-1)^2$. Ce regroupement permet d'encadrer |A|=–A par $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{4x^2}$ et $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{2x^2}$ ⇒ A existe.

2. Étude en b

Nous avons f intégrable sur [a ;b[(ou]b ;a]). Les comparaisons et les propriétés sont presque les mêmes qu'en +∞.

Par un changement de variable x-b→y on se ramène aux intervalles [a-b ;0[(ou]0 ; a-b]) et on fait une comparaison autour de zéro. Il faut se rappeler que $\int_x^1 y^a dy=\left[\frac{y^{a+1}}{a+1}\right]_x^1=\frac{1-x^{a+1}}{a+1}$ existe si a< -1 et que $\int_0^1 ln\, tdt=[t\, ln\, t-t]_0^1=-1$ existe pour faire l'échelle de comparaison.

Règle de Riemman : Il existe α<1 tel que $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha f(x)=k \Rightarrow \int_0^a f(x)dx$ converge

Il existe α>1 tel que $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha f(x)=k \neq 0 \Rightarrow \int_0^a f(x)dx$ diverge

Exemple : $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ existe car lorsque y=(x-1)→0 $\frac{x}{\sqrt{x-1}}=\frac{y+1}{\sqrt{y}}$ est équivalent à $y^{-1/2}$ avec –1/2< -1.

3. Propriétés immédiates :*entre les mêmes bornes on a*

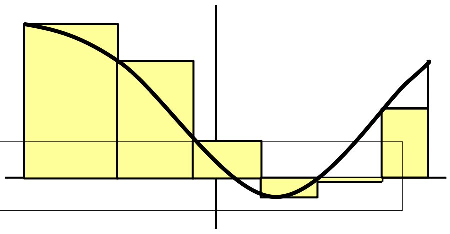
La somme de deux intégrales convergentes est convergente.
La somme d'une intégrale convergente et d'une divergente est divergente.
La multiplication d'une intégrale convergente et d'un réel est convergente.
La multiplication d'une intégrale divergente et d'un réel est divergente.

Quant à la somme de deux intégrales divergentes, on ne peut rien dire : $\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b -f(t)\,dt = 0$

D) Intégrales doublement généralisées

Soit *f* intégrable sur]a ;b[: $\int_a^b f(x)\,dx$ n'existe que si $\exists c \in]a;b[$ *tel que* $\int_c^b f(x)\,dx$ *et* $\int_a^c f(x)\,dx$ existe

Attention : Prenons *f*(x)=x et étudions $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$. Cette intégrale étant nulle on pourrait conclure (trop) rapidement que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe !



9 Méthodes numériques de calcul

A) Méthode des carrés

L'intégrale de *f* entre a et b est la surface S qui se trouve entre les droites x=a, x=b, y=0 et la courbe y=*f*(x) , les surfaces en dessous la droite y=0 étant comptées négativement.

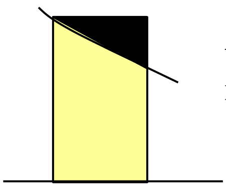
On peut découper le segment [a ;b] en n morceau : [a ;a_1], [a_1 ;a_2],…,[a_{n-1} ;b] avec $a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}<b=a_n$ et calculer l'aire formée par les rectangle de base [a_i ;a_{i+1}] de hauteur *f*(a_i). Cette aire sera une approximation de la surface S, donc de $\int_a^b f(t)\,dt$

Ceci nous donne $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) f(a_i)$.

Nous pouvons aussi répartir uniformément les a_i entre a et b. Ceci donnerai $a_i = a + i\frac{b-a}{n} = \frac{ib+(n-i)a}{n}$ et $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{ib+(n-i)a}{n}\right)$

L'erreur maximale par rectangle est (a_{i+1}-a_i).(max.(*f*[a_i ;a_{i+1}])-min.(*f*[a_i ;a_{i+1}])). Si la fonction *f* est monotone sur [a_i ;a_{i+1}], cette erreur devient (a_{i+1}-a_i).|*f*(a_i)-*f*(;a_{i+1})|.

B) Méthode des trapèzes

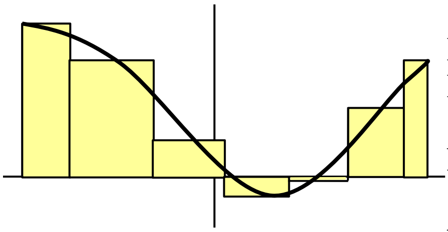


Pour améliorer l'erreur et « coller » plus à la courbe, on peut changer le rectangle en un trapèze rectangle (voir schéma) dont la base (hauteur) est [a_i ;a_{i+1}] et les deux côtés parallèles mesures respectivement *f*(a_i) et *f*(a_{i+1}). Son aire est :
(a_{i+1}-a_i).(*f*(a_i)+*f*(;a_{i+1}))/2

Ceci nous donne comme approximation : $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\left(f(a_{i+1})+f(a_i)\right)}{2}$.

Avec une répartition uniforme on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ib+(n-i)a}{n}\right)\right) = \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)\right)+\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ib+(n-i)a}{n}\right)\right)$$



Nous reconnaissons dans la seconde partie de la formule la somme de la méthode des carrés sans son premier terme. Ceci s'explique car en fait la méthode des trapèze revient à calculer l'aire ci contre en jaune.

Attention : les rectangle ne sont centré sur les ai, mais c'est les côtés horizontaux qui passent entre a_{i-1} et a_i ou a_i et a_{i+1}.

Ceci s'explique facilement grâce aux formules de la surface du trapèze : sa surface est la somme des surfaces de deux rectangles dont la hauteur est la moitié de la hauteur du trapèze et les longueurs celles des deux côtés parallèles du trapèze.

Cette méthode induit une erreur relative à priori moins importante que la méthode des rectangles : la valeur prise est vers le milieu du rectangle, pas à une extrémité.

IV) Les espaces vectoriels et sous espaces vectoriel

1 Les espaces vectoriels

Un ensemble muni de deux lois vérifiant 8 propriétés qui sont assez naturelles est un Espace Vectoriel ou EV. Bien qu'il ne soit pas toujours facile de montrer que le triplet formé de l'ensemble des des 2 opérations forme en EV, cette démonstration est intéressante car elle apporte alors beaucoup de propriétés forts pratiques.

I) Définition

Soit **K** un corps. On appelle **K-espace vectoriel** tout triplet (E,+,•) où :

- E est un ensemble ;
- (E,+) est un groupe abélien ;
  http://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_%28math%C3%A9matiques%29

La structure algébrique d'un *groupe* est un monoïde (un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre) dont tous les éléments sont inversibles. En d'autres termes, un groupe noté (G,*,e) est un ensemble G muni d'une loi de composition interne * et d'un élément neutre e (nécessairement unique) qui satisfont les axiomes suivants :

identité : $\forall x \in G, x*e=e*x=x$;
inverse : $\forall x \in G, \exists y \in G, x*y=y*x=e$, y est dit inverse de x et on le note aussi x^{-1} ;
associativité : $\forall (x,y,z) \in G^3, x*(y*z)=(x*y)*z$
Suite à cette remarque, les parenthèses deviennent inutiles dans une telle écriture

http://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_ab%C3%A9lien

En algèbre générale, un **groupe abélien**, ou groupe commutatif, est un groupe (G,*) où la loi de composition interne * est commutative, c'est-à-dire que pour tous les éléments $(a,b) \in G^2$, on a .a*b=b*a

- • est une loi externe sur E à scalaire dans **K** telle que :
  - l'élément unité « 1 » du corps **K** est neutre à gauche pour la loi « • » : $\forall u \in E, 1 \cdot u=u$
  - la loi « • » est distributive à gauche par rapport à l'addition + de E : $\forall \lambda \in K, \forall (u,v) \in E^2, \lambda \cdot (u+v)=\lambda \cdot u+\lambda \cdot v$
  - La loi « • » est exodistributive à droite par rapport à l'addition du corps **K** : $\forall (\lambda,\mu) \in K^2, \forall u \in E, (\lambda+\mu) \cdot u=\lambda \cdot u+\mu \cdot u$
  - La loi « • » est exo-associative par rapport à la multiplication du corps **K** (elle l'« importe » dans l'espace vectoriel) : $\forall (\lambda,\mu) \in K^2, \forall u \in E, (\lambda \cdot \mu) \cdot u=\lambda \cdot (\mu \cdot u)$

Si $K=\mathbb{Q}, \mathbb{R} ou \mathbb{C}$, on parle respectivement d'espace vectoriel rationnel, réel ou complexe. Cette terminologie s'utilise notamment en analyse.

Dans certains ouvrages, les vecteurs peuvent être notés surmontés d'une flèche ou écrits avec des lettres en gras.

Rapidement :

On dit que E est un espace vectoriel sur K si

1) (E, +) est un groupe abélien, c'est-à-dire :

− ∀(x, y, z) ∈ E^3 , (x + y) + z = x + (y + z) (associativité)

− ∀(x, y) ∈ E^2 , x + y = y + x (commutativité)

− ∃e ∈ E, ∀x ∈ E, x + e = x (élément neutre)

− $\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = e$ (symétrique)

2) $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in K^2$,

− $\lambda . (x + y) = \lambda . x + \lambda . y$ (factorisation sur E)

− $(\lambda + \mu) . x = \lambda . x + \mu . x$ (factorisation de K)

− $\lambda . (\mu . x) = (\lambda\mu) . x$

− $1 . x = x$ où 1 est l'élément neutre pour la multiplication de K

($\forall$ se lit quelque soit et $\exists$ il existe, c'est une notation mathématique)

II) Exemples

A) *L'espace à 3 dimensions*

L'espace dans lequel on se meut.

Soit deux vecteurs (ou éléments de $\mathbb{R}^3$) u et v de coordonnées réelles (x_1 , y_1, z_1) et (x_2 , y_2 , z_2) on définit leur somme u+v de cette manière : (x_1 , y_1, z_1)+(x_2 , y_2 , z_2)=(x_1+x_2 , y_1+y_2 , z_1+z_2), et on définit le produit par un réel a de cette manière : a(x_1 , y_1, z_1)=(a.x_1 , a.y_1, a.z_1)

Montrez que c'est un EV et identifiez les éléments neutres.

Remarques :

On peut changer le nombre de dimensions, la difficulté de la démonstration reste pratiquement la même. Il n'y a que la longueur qui change.

On peut prendre les complexes à la place des réels, c'est pareil.

B) *l'ensemble des fonctions réelles $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$*

Montrez que l'ensemble des fonctions réelles munie des lois + et * un espace vectoriel
je rappelle les deux lois : (f+g)(x)=f(x)+g(x) et (k*g)(x)=k*g(x), ceci $\forall (f,g) \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ et $\forall k \in \mathbb{R}$,
Remarque : on aurait pu faire pareil avec l'ensemble des fonctions complexes.
Montrez que c'est un EV et identifiez les éléments neutres.

Premières propriétés

Des axiomes ci-dessus découlent les propriétés suivantes :

- L'élément zéro « 0 » du corps **K** est exoabsorbant à gauche pour la loi • : $\forall u \in E, 0, \cdot u = O_E$
- L'élément neutre de l'addition vectorielle est absorbant à droite pour la loi • : $\forall \lambda \in K, \lambda \cdot 0_E = 0_E$

C) *Combinaisons linéaires*

Les deux opérations sur un espace vectoriel permettent de définir la **combinaison linéaire**, c'est-à-dire la somme finie de vecteurs affectés de coefficients (scalaires). La combinaison linéaire d'une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ ayant pour coefficients $(\lambda_i)_{i\in I}$ est le vecteur de E donné par : $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i$. Lorsque l'ensemble d'indexation I est infini, il est nécessaire de supposer que le support de la famille, $(\lambda_i)_{i\in I}$ soit fini (on a un nombre fini de λ_i non nul).

2 Les sous-espaces vectoriels

Le plus souvent, on n'a pas besoin de vérifier que les propriétés des espaces vectoriels sont bien vérifiées, il suffit de montrer qu'on est dans une sous parie d'un gros EV connu et qu'on reste dedans. C'est bien plus simple et suffisant. Cette sous partie s'appelle un Sous Espace Vectoriel (ou SEV) et est un Espace Vectoriel (EV) avec toutes ses propriétés.

I) Définition et propriétés

(source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Sous-espace_vectoriel)

Un **sous-espace vectoriel** d'un espace vectoriel *E* est un sous-groupe additif *F* de *E* stable par l'action de **K**, c'est-à-dire tel que :

- *F* n'est pas un ensemble vide
- la somme de deux éléments de *F* est un élément de *F*
- le produit d'un scalaire par un vecteur de *F* appartient à *F*.

De manière équivalente, un sous-espace vectoriel est une partie non vide et stable par combinaison linéaire.

Rapidement :

Pour montrer que F est un SEV de E, on identifiera un élément de F (il est non vide s'il a au moins un élément) et nous montrerons qu'en prenant deux éléments quelconque de F (u et v) et un élément a quelconque du corps K que au+v est encore dans F.

II) Exemples

A) Les fonctions qui vérifient f(x₀)=k

Montrez à quelle condition l'ensemble des fonctions qui vérifient $f(x_0)=k$ est un SEV de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

B) Les fonctions T périodiques

Ceci sera utile pour le cours futur sur les séries de Fourier.

Montrez que l'ensemble des fonctions T périodique* est un SEV de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

* : une fonction T périodique vérifie f(x+T)=f(x), sa période (la plus petite possible) est un diviseur de T, la fonction constante est aussi une fonction T périodique.

C) Les polynômes

1) Montrer que $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes est un SEV de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) Montrez que l'ensemble des polynômes de degré n est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.

3) Montrez que $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.

Remarques : $\mathbb{R}_n[X]$ est un SEV de $\mathbb{R}[X]$ qui est lui-même un SEV de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

III) Propriétés

L'**intersection** de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel mais l'union n'en est pas un en général. C'est pourquoi on définit la **somme** de deux sous-espaces vectoriels *F* et *G* comme l'ensemble $F+G=\{x+y\backslash(x,y)\in F\times G\}$

Cette somme est un sous-espace vectoriel. C'est même le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant les deux sous-espaces vectoriels initiaux.

Deux sous-espaces vectoriels *F* et *G* de *E* sont dits **en somme directe** lorsque leur intersection est l'espace nul et que leur somme est l'espace *E*. On note alors $E=F\oplus G$. Dans ce cas, les sous-espaces vectoriels *F* et *G* sont dits **supplémentaires** l'un de l'autre dans *E*. L'axiome du choix permet d'assurer l'existence d'un supplémentaire à tout sous-espace vectoriel, mais il n'y a jamais unicité (sauf dans le cas du sous-espace nul ou de l'espace total). Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, les supplémentaires d'un plan vectoriel quelconque sont toutes les droites vectorielles non contenues dans ce plan. Il existe donc ici une infinité de supplémentaires différents.

Si *E* est la somme directe de *F* et *G*, tout vecteur de *E* se décompose alors de manière unique en une somme de deux vecteurs, l'un appartenant à *F* et l'autre à *G*. Plus généralement, une famille de sous-espaces vectoriels (F_i) est dite en somme directe dans *E* si tout vecteur de *E* s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire $\sum \lambda_i x_i$ avec pour tout *i*, $x_i \in F$. Cette définition implique que les sous-espaces vectoriels F_i soient d'intersection nulle deux à deux et que leur somme soit égale à *E* mais la réciproque est fausse. Il suffit de prendre comme contre-exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$ les trois droites dirigées par (0,1,0), (1,0,0) et (1,1,0).

3 Les applications linéaires

À ne pas confondre avec la notion physique de fonction linéaire. Les physiciens sont moins restrictifs que les mathématiciens. En physique une fonction linéaire est une fonction dont la courbe représentative est une droite, alors qu'en maths, une droite est une fonction affine. L'application linéaire serait une droite qui passe par l »origine.

I) Définitions

(source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Application_lin%C3%A9aire)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application f de E dans F est dite **linéaire** si elle préserve les combinaisons linéaires, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in K, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

II) Remarques

L'ensemble des applications linéaires de *E* dans *F* est noté *L(E,F)*. Lorsque F=E, ces applications sont appelées **endomorphismes** de *E* et on note leur ensemble *L(E)*.
Un **isomorphisme** d'espaces vectoriels est une application linéaire bijective. Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes de *E* est le **groupe linéaire** noté GL(E).

On peut citer les exemples suivants d'applications linéaires.

- L'application nulle est le neutre pour l'addition vectorielle dans *L(E,F)*.
- L'application identité et plus généralement toutes les homothéties vectorielles (non nulles) sont des automorphismes.
- Les symétries, rotations et similitudes vectorielles (non nulles) sont des automorphismes du plan ou de l'espace usuel.
- Les projecteurs sont des endomorphismes.
- La dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel des polynômes.

Une **forme linéaire** sur un **K**-espace vectoriel *E* est une application linéaire de *E* dans **K**. L'ensemble des formes linéaires sur *E* est appelé l'**espace dual** de *E* et il est noté E^*.

Soit $f \in L(E,F)$.

- On appelle **noyau** de f et on note Ker(f) l'ensemble $\{x \in E / f(x) = 0_F\}$ *(noyau se dit **kernel** en anglais)*.
- On appelle **image** de f et on note Im(f) l'ensemble $\{f(c), x \in E\}$.

On a les propriétés suivantes :

- L'image et le noyau sont des sous-espaces vectoriels respectivement de l'espace but et de l'espace source.
- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est l'espace nul.

- L'ensemble *L(E,F)* est un espace vectoriel.
- L'espace vectoriel L($\mathbf{K}^p$,$\mathbf{K}^n$) s'identifie à l'espace des matrices $M_{n,p}(\mathbf{K})$.

III) Exemples (dans l'ensemble des fonctions)

A) La dérivation

- L'application qui a une fonction fait correspondre sa dérivée, est-elle une application linéaire ?

- L'application qui a une fonction fait correspondre sa dérivée n$^{\text{ème}}$, est-elle une application linéaire ?

B) Les équations différentielles linéaires

Soit l'application de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui à f associe f'(x)+a(x)f(x) où a(x) est un élément de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, est-elle une application linéaire ?

C) Calcul des a_n et b_n pour les fonctions T périodiques

Soit une application Fn de l'ensemble des fonctions de période T dans $\mathbb{R}^2$ qui à une fonction x(t) associe le couple (a_n,b_n) tel que $a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$ et $b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$.

Est-ce une application linéaire ?

Ce sont les calculs qu'on étudiera par la suite dans le cadre des séries de Fourier.

4 La dimension d'un EV (ou SEV)

I) Les familles libres, génératrices, et les bases

A) Famille libre

Une famille (finie ou infinie) de vecteurs de *E* est dite libre, ou encore, la famille est constituée de vecteurs « linéairement indépendants », si la seule combinaison linéaire des vecteurs égale au vecteur nul 0_E est celle dont tous les coefficients sont nuls (autrement dit : si toute combinaison linéaire des à coefficients non tous nuls est différente du vecteur nul).

Rapidement : avec une famille libre, on n'a qu'une seule façon de générer un vecteur si on peut le faire.

B) Famille génératrice

En algèbre linéaire, une **famille génératrice** est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel dont les combinaisons linéaires permettent de construire tous les autres vecteurs de l'espace.

Rapidement : avec une famille génératrice, on peut générer tous les vecteurs.

C) Base

Une famille de vecteurs de *E* est une base de *E* si c'est une famille à la fois génératrice de *E* et libre1. De façon équivalente, une famille est une base de l'espace vectoriel *E* quand tout vecteur de l'espace se décompose de façon unique en une combinaison linéaire de vecteurs de cette base.

Rapidement : avec une base, on peut tout générer, et d'une seule manière.

D) Exemples

La famille de fonction constituée de la fonction constante f(x)=1 et des fonctions $\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$ et $\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$ $n\in\mathbb{N}^+$ est une base des fonctions T périodiques continue.

Les x^n avec $n\in\mathbb{N}$ ou n majoré par m est un base de $\mathbb{R}[x]$ ou $\mathbb{R}_m[x]$.

II) <u>La dimension d'un SE ou d'un SEV</u>

A) Propriété et définition

Toutes les bases d'un EV ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de l'EV.

B) Exemples

1) Trouvez une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire sa dimension.

Parmi les familles suivantes les quelles sont des bases de $\mathbb{R}^3$:

A={(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)} ; B={{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(0,1,0)},C={(1,0,1),(0,1,0)}

2) Trouvez une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déduire sa dimension.

V) Les complexes, Puissance, Spectre d’un Signal

Pour la semaine prochaine

Faire le QCM sur les complexes

1 Les nombres complexes

Le QCM ayant été fait pour cette scéance, nous allons donc pouvoir commencer ce cours au point II) Le plan complexe.

I) Définition

A) Un nombre dont le carré fait -1

Tout réel au carré donne un nombre positif. Pour trouver un nombre dont le carré fasse -1, on doit sortir du corps des réels. En mathématiques, ce nombre dont le carré fait -1 est noté *i*. Mais, ici, en GEii où on fait beaucoup d’électricité, *i* est souvent utilisé pour représenter un courant. Pour éviter cette confusion, nous utiliserons aussi la notation *j*.

$j^2=-1$.

B) construction*

Nous allons construire avec ce nombre *j* et l’ensemble des réels ($\mathbb{R}$) un nouvel ensemble qu’on appelle le corps des Complexes : $\mathbb{C}$.

Voici son mode de construction :

$z=a+jb$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ un complexe

Nous allons étendre sur cet ensemble les lois + (addition) et x (multiplication) habituelles. Pour ceci, nous z=a+jb et z’=a’+jb’ avec $(a,b,a',b')\in\mathbb{R}^4$:

z+z’=a+jb+a’+jb’=(a+a’)+j(b+b’)

z x z’ = z.z’ = zz’=a(a’+jb’)+jb(a’+jb’)=aa’+jab’+ja’b+j²bb’=(aa’-bb’)+j(ab’+a’b)

Ces lois ont été faites pour prolonger sur $\mathbb{C}$ nos lois primordiales de $\mathbb{R}$ avec les mêmes propriétés comme la commutativité, l’associativité, la factorisation. Nous pouvons bien vérifier que si on prend des réels (b=b’=0) les lois réelles restes les mêmes, si z=1 (a=1 et b=0) z.z’=z’, si z=0 (a=b=0) z+z’=z’ et z.z’=0 et qu’on a toujours j²=-1 (a=a’=0 et b=b’=1).

Nous pouvons définir dans $\mathbb{C}$ comme nous l’avions fait dans $\mathbb{R}$ la division, les puissances entières (les puissances non entières n’étant disponible que pour les réels positifs).

L’ensemble des réels est un sous-ensemble de l’ensemble des complexes, celui des nombres dont la partie imaginaire est nulle.

On appelle imaginaire pur un nombre dont la partie réelle est nulle : un nombre de la forme jx où x est un réel.

1. Exemples

(3-4j)+(4+5j)=

(3-4j).(4+5j)=

j.j.j=

j.j.j.j=

2j.2j=

Donnez un nombre dont le carré fait -9 : dont le carré fait -2 :

C) Forme algébrique, partie imaginaire et partie réelle, conjugué

La notation z=a+jb avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ d'un nombre complexe est appelée forme algébrique d'un nombre complexe. Cette forme se décompose en deux parties : la partie réelle a et la partie imaginaire b. On note : $a=\Re(z)=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\Im(z)=\mathrm{Im}(z)$

Le conjugué d'un complexe z=a+jb est le complexe $\bar{z}=\overline{a+jb}=a-jb$ qui a la même partie réelle et la partie imaginaire opposée.

Calculez : $z+\bar{z}=$

$z-\bar{z}=$

$z\cdot\bar{z}=$

En déduire :

$\Re(z)=$

$\Im(z)=$

<u>Remarque :</u> pour faire une division avec des complexes et trouver facilement la partie réelle et la partie imaginaire, il faut transformer la fraction pour avoir un dénominateur réel. Par exemple, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemples : calculez les expressions

(9-2j)/(2+6j)=

(9-2j)+(2+6j)=

(9-2j)x(2+6j)=

$\overline{(9-2j)/(2+6j)}$=

$\overline{(9-2j)}+\overline{(2+6j)}$=

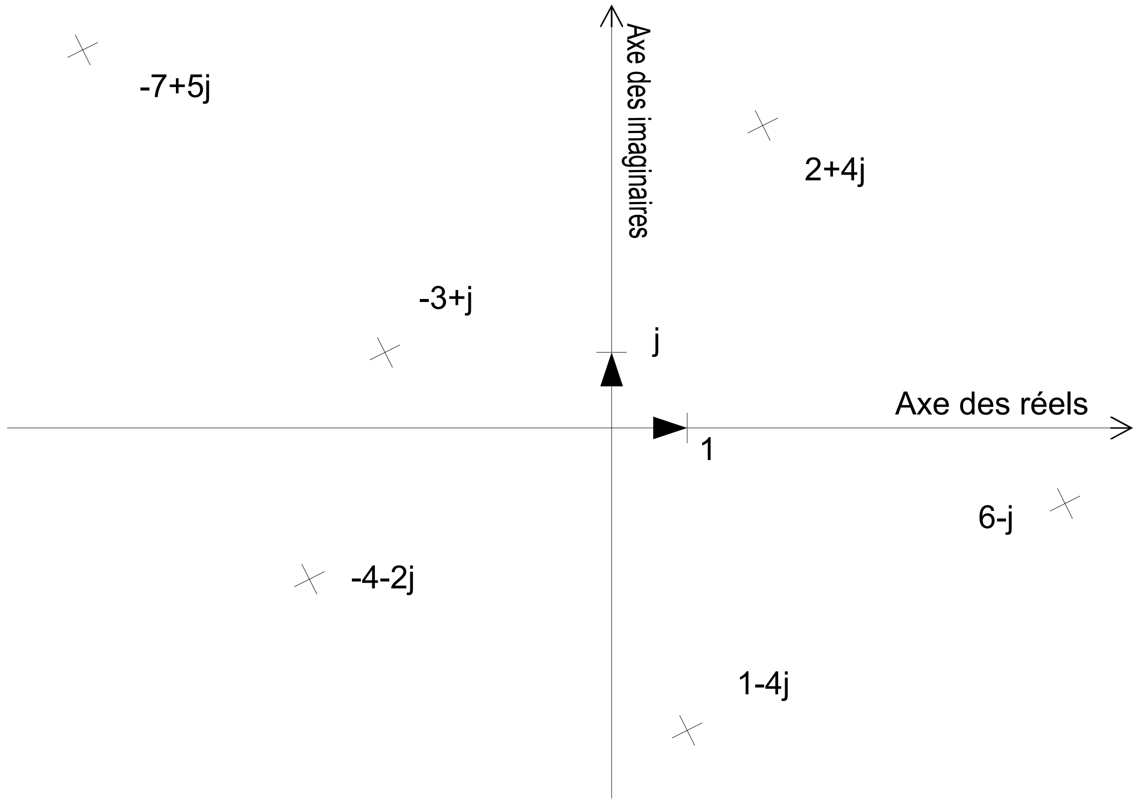
$\overline{(9-2j)}$x$\overline{(2+6j)}$=

<u>Remarque :</u> $\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}$ et $\overline{a.b}=\bar{a}.\bar{b}$ (nous ne l'avons pas montré avec nos exemples, nous l'avons juste « deviné »).

II) <u>Le plan complexe</u>

Soit P un plan muni de deux axes orthogonaux, un axe « réel » et un axe « imaginaire ». La graduation unitaire est 1 sur l'axe réel et j sur l'axe imaginaire, Nous pouvons représenter tout complexe z=a+jb, par un point M du plan de coordonnées a sur l'axe réel et b sur l'axe imaginaire. Ainsi chaque point du plan complexe (a,b) est la représentation graphique d'un nombre complexe unique a+jb.

On dit que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ perpendiculaires (ortho) de longueur 1 (normé) et pour aller de $\vec{v}$ à $\vec{u}$, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ($(O,\vec{u},\vec{v})$ direct). $\vec{u}$ oriente l'axe des réels et $\vec{v}$ l'axe des imaginaires.



Par définition, on dit que M ou $\vec{OM}$ est l'image de z et on dit aussi la réciproque qui est équivalente : z est l'affixe de M ou de $\vec{OM}$.

Le plan complexe désigne un plan, muni d'un repère orthonormé, dont chaque point est la représentation graphique d'un nombre complexe unique.

La représentation dans le plan complexe permet souvent de comprendre des opérations sur les complexes.

III) Exercices avec la forme algébrique

Placez les points suivants sur le plan complexe : $M_1(2+j)$, $M_2(1-3j)$, $M_3(1+2j)$, $M_4(-1+j)$ et $M_5(2-2j)$

Placez-les sur le plan complexe et donnez la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué du résultat des opérations suivantes :

- A=(2+j)(1-3j)=
- B=1/(1+2j)
- C=(2-2j)/(1+2j)=
- D=(2+j)+(1-3j)=
- E=(2+j)-(1-3j)=

  Nous pouvons voir que l'addition de deux complexes revient à additionner les vecteurs images.
- Application : faire le dessin pour trouver l'addition de z=2-3j et z'=-3+2j.

IV) Exercices

Placez dans le plan complexe 2 points A et B (ni sur l'axe réel, ni sur l'axe imaginaire, module entre 0,5 et 3) dont les affixes sont simples (partie imaginaire ou partie réelle entière).

Écrivez bien les calculs sur la feuille que vous rendrez.

Placez dans le plan les points A_1 et B_1 dont les affixes sont les opposées des premières.

Placez dans le plan les points A_2 et B_2 dont les affixes sont les conjuguées des premières.

Placez dans le plan les points A_3 et B_3 dont les affixes sont les inverses des premières.

Placez dans le plan les points A_4 et B_4 dont les affixes sont les conjuguées des inverses des premières.

On remarque un alignement. Lequel ?

2 Valeur moyenne, énergie, puissance moyenne - Spectres

I) Valeur moyenne

Par définition, la valeur moyenne d'un signal x(t) est : $V_{moy}=\frac{1}{T_{mes}}\int_{\theta}^{\theta+T_{mes}} x(t)\,dt$

Dans le cas d'un signal périodique Tmes est égale à la **période du signal**.

Exemple :

$$V_{moy}=\frac{1}{T_{mes}}\int_{\theta}^{\theta+T_{mes}}\left(E+A_1\cos(2\pi f_1 t+\varphi_1)\right)dt \quad \text{avec } T_{mes}=\frac{1}{f_1} \text{ une période de la sinusoïde}$$

$$V_{moy}=\frac{1}{T_{mes}}\left(\int_{\theta}^{\theta+T_{mes}} E\,dt+\int_{\theta}^{\theta+T_{mes}} A_1\cos(2\pi f_1 t+\varphi_1)\,dt\right)$$

$$V_{moy}=\frac{1}{T_{mes}}\left(\int_{\theta}^{\theta+T_{mes}} E\,dt\right)=E$$

En intégrant sur un temps Tmes correspondant à un **nombre entier de périodes de la sinusoïde**, l'intégrale d'une composante sinusoïdale est nulle.

Exercice 1

Calculer la valeur moyenne d'un signal impulsionnel de période T, d'amplitude E, de largeur τ et de rapport cyclique $\eta=\frac{\tau}{T}$

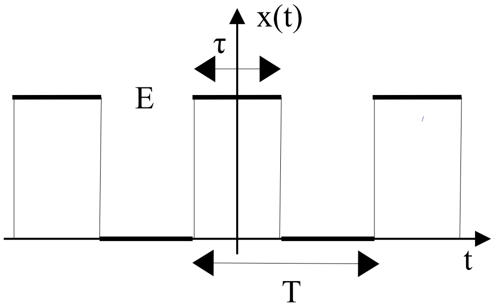


Figure 6: impulsion rectangulaire positif de largeur T et de rapport cyclique η = τ/ T

Exercice 2

Calculer la valeur moyenne du signal triangle $x_1(t)$ représenté figure 3

Pour cela exprimer la fonction sur les intervalles[-T/2;0] et [0;T/2] , puis intégrer chaque partie.

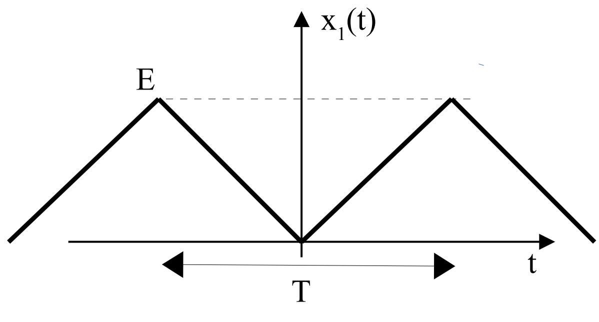


Figure 7: signal triangle de période T

II) Énergie, puissance moyenne et valeur efficace d'un signal périodique

Énergie d'un signal : on appelle énergie du signal x(t) entre les instants t_1 et t_2 la valeur

$$Energie=\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt$$

Puissance moyenne d'un signal : c'est l'énergie du signal pendant le temps T_{mes} divisée par ce même temps

$$P_{moy}=\frac{1}{T_{mes}}\int_{\theta}^{\theta+T_{mes}} x^2(t)\,dt$$

Puissance moyenne d'un signal T périodique : c’est l’énergie du signal pendant une période divisée par cette période T

$$P_{moy}=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} x^2(t)\,dt$$

Remarque : la puissance moyenne se calcule sur une période. Il suffit donc de connaître **l'équation du signal x(t) sur une période** choisie arbitrairement pour calculer sa puissance moyenne.

Cas d'une valeur constante : la puissance moyenne d'un signal constant de valeur A est :

$$P_{moy}=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} A^2 dt=A^2$$

Cas sinusoïdal : la puissance moyenne d'un signal sinusoïdal d'amplitude A est :

$$P_{moy}=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T}\left(A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)^2 dt=\frac{A^2}{2}$$

Exercice 3 : Démontrer que la puissance moyenne d’un signal sinusoïdal d’amplitude A est :

$$P_{moy}=\frac{A^2}{2}$$

Valeur efficace d’un signal périodique : c'est la valeur constante qui possède la même puissance moyenne que le signal. Comme la puissance moyenne d’une constante de valeur V_{eff} vaut V_{eff}^2, on obtient :

$$V_{eff}^2=P_{moy}=\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} x^2(t)\,dt$$

$$V_{eff}=\sqrt{P_{moy}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} x^2(t)\,dt}$$

Exercice 4 : En déduire que la valeur efficace d’un signal sinusoïdal d’amplitude A est :

$$V_{eff}=\sqrt{P_{moy}}=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

Exercice 5 :

Calculer la puissance moyenne d'un signal impulsionnel de période T, d'amplitude E, de largeur τ et de rapport cyclique $\eta=\frac{\tau}{T}$

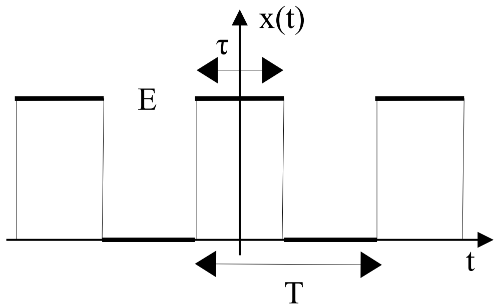


Figure 8: impulsion rectangulaire positif de largeur T et de rapport cyclique η = τ/ T

Exercice 6

Calculer la puissance moyenne du signal dent de scie $x_1(t)$ représenté ci-contre.

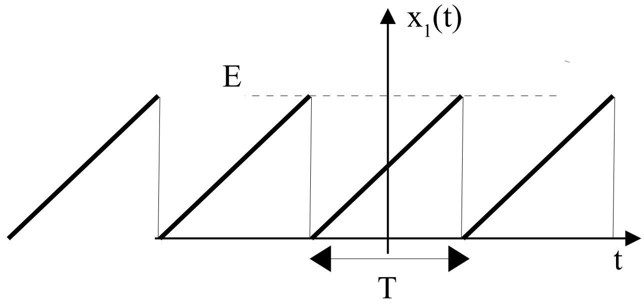


Figure 9: signal dent de scie de période T

III) Contenu fréquentiel d'un signal périodique : spectres

A) *Introduction*

Pour l'instant, on a vu qu'un signal est fonction d'une variable qui est généralement le temps . A cette forme naturelle du signal, que l'on appelle la forme temporelle, on peut faire correspondre une autre description que l'on appelle fréquentielle et dont la variable est la fréquence, de dimension inverse du temps. Cette description qui correspond au tracé du spectre fréquentiel du signal offre de nombreuses possibilités pour le traitement du signal.

B) *Forme standard d'une composante sinusoïdale*

Pour des raisons d'écriture d'une fonction sinusoïdale en complexe, une sinusoïde s'écrit :

$$x(t)=A\cos(2\pi f\,t+\varphi)=A\cos(\omega t+\varphi)=A\cos(2\pi\frac{1}{T}t+\varphi)$$

où $A\geq 0$ est l'amplitude, ω est la pulsation, f est la fréquence, T est la période, ϕ est la phase.

<u>Remarque</u> : $x(t)=A\cos(2\pi f\,t+\varphi)=\mathbb{R}(A e^{j(2\pi f t+\varphi)})=\mathbb{R}(A e^{j(2\pi f t)}e^{j\varphi})=\mathbb{R}(A e^{j\varphi}e^{j(2\pi f t)})$

$A e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe de la fonction sinusoïdale

C) *Spectre d'un signal périodique*

Pour tracer le spectre d'un **signal périodique**, il faut **obligatoirement** le mettre sous la forme d'**une somme de composantes sinusoïdales**. Par convention on écrit chaque composante sous une forme de cosinus, avec A_i, l'amplitude de chaque composante, **positive ou nulle** $A_i\geq 0$ et f_i la fréquence :

$$x(t)=E+A_1\cos(2\pi f_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(2\pi f_2 t+\varphi_2)$$

Spectre d'amplitude : on représente la valeur absolue des amplitudes en fonction soit de la fréquence f de la composante, soit de la pulsation . $\omega=2\pi f$

Ce spectre d'amplitude n'est défini que pour des valeurs particulières de la fréquence. Il est aussi appelé **spectre de raies**. Il représente l'amplitude de chaque fréquence qui compose le signal.

Spectre de phase : on représente la valeur des φ en fonction de la fréquence f. La valeur de la phase est toujours comprise dans [$-\pi$, $+\pi$].

<u>**Exemple simple de spectre d'amplitude**</u>:

- soit $x(t)=-3=3\cos(2\pi 0 t+\pi)$
- soit $x(t)=2\cos(4\pi f_1 t)=2\cos(2\pi(2f_1)t)$
- soit $x(t)=-\cos(\frac{\pi}{T_1}t)=1\cos(2\pi\frac{1}{2T_1}t+\pi)$
- soit $x(t)=-2\sin(2\pi f_1 t)=2\cos(2\pi f_1 t+\frac{\pi}{2})$

<u>**Exemple de spectre d'amplitude**</u>: soit $x(t)=E+A\sin(2\pi f_1 t)-B\cos(2\pi f_2 t)$ (A>0 et B>0)

en faisant apparaître l'amplitude et la phase de chaque composante: $x(t)=E\cos(0t)+A\cos(2\pi f_1 t-\pi/2)+B\cos(2\pi f_2 t+\pi)$

ce qui donne pour le spectre d'amplitude :

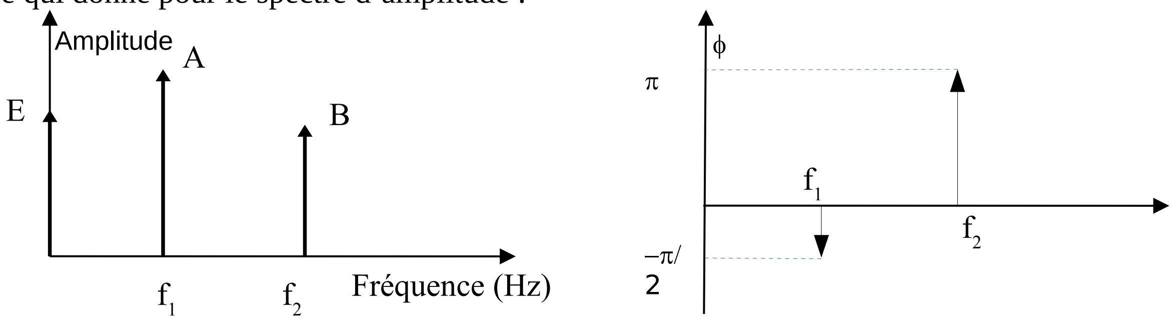


Figure 10: exemple de spectre d'amplitude et de phase

Exercice 7 : tracer le spectre d'amplitude de la fonction $x(t)=2+\sin(\pi(100)t)-3\cos(2\pi(300)t)$

Exercice 8 : tracer le spectre d'amplitude de la fonction $x(t)=1+\cos(2\pi(100)t)\cos(2\pi(300)t)$

D) Spectre de puissance

Spectre de puissance : pour un signal sous la forme d'**une somme de composantes sinusoïdales**, on représente la valeur de la puissance de chacune des composantes en fonction soit de la fréquence f, soit de la pulsation . $\omega=2\pi f$

On rappelle que :

- la puissance moyenne d'un signal constant de valeur A est A^2
- la puissance moyenne d'un signal sinusoïdal d'amplitude A est : $\frac{A^2}{2}$

Si le signal est en Volt, le spectre de puissance s'exprime en Volt^2.

Théorème de Parseval : La puissance moyenne du signal x(t) est égale à la somme de la puissance de chaque composante.

Exemple :

soit $x(t)=E+A\cos(2\pi f_1 t-\pi/2)+B\cos(2\pi f_2 t-\pi)$

ce qui donne pour le spectre de puissance :

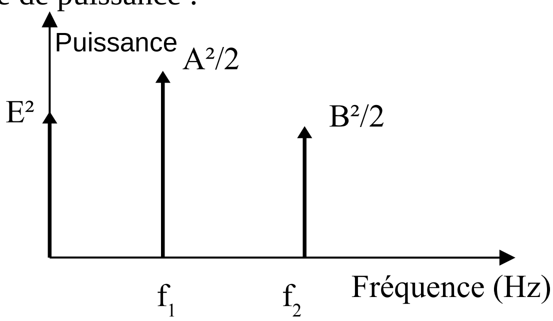


Figure 11: exemple de spectre de puissance

E) Exercices pour la séance suivante

1) Tracer le spectre d'amplitude de $x_1(t)=\cos(t)$, et $x_2(t)=x_1^2(t)$.
2) Tracer les spectres d'amplitude et de phase de la fonction $x_3(t)= -1+\sin(2t)+\cos(3t)$.

3)Tracez les spectres de phase, d'amplitude et de puissance de :

$x(t)=3+4\cos(2\pi f_1 t)+3\sin(4\pi f_1 t)-2\sin(6\pi f_1 t)$

VI) Les séries de Fourier

1 Décomposition en Série de Fourier (SF) des signaux périodiques

I) Décomposition en Série de Fourier (SF) des signaux périodiques

Afin de connaître et tracer le spectre d'un signal périodique quelconque, et donc pas écrit initialement sous forme de somme de sinusoïdes, on le décompose en série de Fourier. On peut alors tracer l'amplitude et la phase de chaque composante de cette somme de sinusoïdes en fonction de sa fréquence. On obtient ainsi le spectre de ce signal périodique.

A) *Signaux périodiques*

Les signaux périodiques forment une classe très importante des signaux étudiés. Ils satisfont à la relation : f(t+T)=f(t) où T est la période du signal.

B) *Décomposition en Série de Fourier*

Définition : on appelle série de Fourier (SF) une série trigonométrique de variable $t \in \mathbb{R}$ et de valeur :

$$s(t)=c_0+\left(c_1\cos(\omega_0 t+\phi_1)\right)+\left(c_2\cos(2\omega_0 t+\phi_2)\right)+\ldots+\underbrace{\left(c_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)\right)}_{\textit{terme général de la série}}+\ldots$$

$$s(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)\right)$$

Le terme général $h_n(t)=c_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)$, appelé harmonique n, est un cosinus de pulsation multiple **entière** de ω_0, et d'amplitude c_n et de phase φ_n, avec $c_n \geqslant 0$

Décomposition en Série de Fourier : on peut montrer que toute fonction périodique f(t) de période T qui vérifie les conditions de Dirichlet ou de Jordan-Dirichlet (bornée, à dérivée bornée et admettant un nombre fini de discontinuités sur une période), est égale à sa décomposition en SF, sauf aux points de discontinuité :

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t+\phi_n\right)\right)$$

Cela correspond à une série de Fourier ou la pulsation de base ω_0 est de même période T que la fonction périodique f(t) à décomposer : . $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$.

Le terme $h_n(t)=\left(c_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t+\phi_n\right)\right)$ est l'**harmonique** n. Il est de fréquence n/T, de période T/n

Le terme $h_1(t)=\left(c_1\cos\left(2\pi\frac{1}{T}t+\phi_1\right)\right)$ est le **fondamental**. Il est de même fréquence 1/T, de même période T que f(t). Le fondamental est donc l'harmonique 1.

La formulation générale de la décomposition est identique pour toutes les fonctions f(t). La valeur des coefficients d'amplitude c_n et de phase φ_n, dépend de la forme de f(t). Pour une fonction f(t) donnée la valeur des coefficients est donnée par :

$c_0=\frac{1}{T}\int_{t'}^{t'+T}f(t)\,dt$, avec t' quelconque ; c_0 représente la valeur moyenne du signal x(t) (ou composante continue)

On ne sait pas calculer directement les coefficients c_n et φ_n. Pour les trouver, on passe par une forme décomposée des harmoniques :

$$h_n(t)=a_n\cos(2\pi\frac{n}{T}t)+b_n\sin(2\pi\frac{n}{T}t)$$

et alors :

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t'}^{t'+T}f(t)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt \text{ et } b_n=\frac{2}{T}\int_{t'}^{t'+T}f(t)\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt \text{ (avec t' quelconque).}$$

On en déduit ensuite les coefficients c_n et φ_n :

$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ et $\varphi_n=arg(a_n-jb_n)$

soit $\varphi_n=atan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$ sur $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ si $a_n>0$ ou

$\varphi_n=atan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)+\pi$ si $a_n<0$ avec

$\cos(\varphi_n)=a_n/c_n$ et $\sin(\varphi_n)=-b_n/c_n$.

On note que $c_n\geq 0$.

Cette relation entre c_n, φ_n et a_n, b_n se représente en considérant l'amplitude complexe des vecteurs tournants associés à sinus et cosinus:

$$\boxed{c_n e^{j\varphi_n}=a_n-jb_n}$$

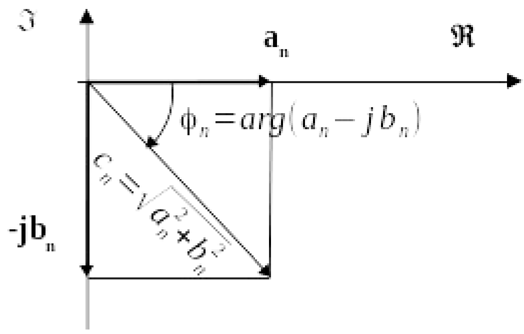


Figure 12: représentation module/argument dans le plan complexe

<u>Convergence</u> : en tout point t la série de Fourier converge vers $(f(t^+) + f(t^-))/2$ où $f(t^+)$ et $f(t^-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de f(t) au point t. Si f(t) est continue au point t, alors $f(t^+)=f(t^-)=f(t)$. Aux **points de discontinuité**, la série de Fourier converge vers la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite. La série de Fourier (sommation infinie) présente les mêmes discontinuités que f(t). Par contre, la série de Fourier **tronquée** (sommation finie) est une fonction continue, car elle est la somme de fonctions continues.

C) *Interprétation de la décomposition en Série de Fourier*

- *Mesure de ressemblance entre deux fonctions (*)*

L'opérateur qui, à deux fonctions périodiques f(t) et g(t), fait correspondre $\frac{1}{T}\int_{t'}^{t'+T}f(t)g(t)dt$ mesurent la "ressemblance" entre f(t) et g(t). Cet opérateur est un **produit scalaire** défini sur des fonctions et non sur des vecteurs. Comme dans le cas du produit scalaire vectoriel, il est maximum positif si les deux vecteurs (ici les deux fonctions) "se ressemblent" c'est-à-dire si, pour des vecteurs, ils sont colinéaires et de même sens. Il vaut 0 si les deux vecteurs (ici les deux fonctions) sont totalement indépendants c'est à dire orthogonaux. Il est maximum négatif si les deux vecteurs (ici les deux fonctions) "se ressemblent" c'est-à-dire, pour des vecteurs, s'ils sont colinéaires mais de sens opposé.

Ainsi, les coefficients a_n mesurent la ressemblance entre f(t) et la fonction $\cos(2\pi\frac{n}{T}t)$ et les coefficients b_n mesurent la ressemblance entre f(t) et la fonction $\sin(2\pi\frac{n}{T}t)$.

Le tracé de $\cos(2\pi\frac{n}{T}t)\cdot\sin(2\pi\frac{n}{T}t)=\frac{1}{2}\sin(2\pi\frac{2n}{T}t)$ sur 2T, montre que sa valeur moyenne est nulle, donc les fonctions sinus et cosinus ne se ressemblent pas : elles sont indépendantes.

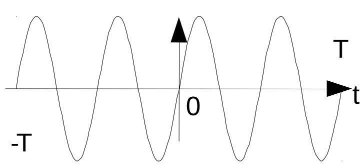


Figure 1: tracé entre –T et T de la fonction $\cos(2\pi\frac{n}{T}t)\cdot\sin(2\pi\frac{n}{T}t)$

De même, on peut montrer que les fonctions $\cos(2\pi\frac{n_1}{T}t)$ et $\cos(2\pi\frac{n_2}{Tt})$ sont indépendantes si n_1 et

n_2 sont deux entiers différents. Ainsi toutes les fonctions $\cos(2\pi\frac{n_1}{T}t)$ et $\sin(2\pi\frac{n_2}{T}t)$ sont indépendantes deux à deux. Elles forment une base orthogonale de l'ensemble des fonctions périodiques. La décomposition en série de Fourier correspond donc à trouver les composantes de f(t) dans cette base.

- *Signification du terme constant c_0*
  Tous les harmoniques sont à valeur moyenne nulle et la valeur moyenne du signal ne se retrouve donc que dans le terme $c_0=a_0$.
  Si on décale l'axe des ordonnées d'une valeur constante *on ne modifie pas* les coefficients a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier du signal. Cette remarque est utilisée pour le calcul des coefficients dans le paragraphe suivant. De plus la valeur moyenne est indépendante de l'origine des temps choisie (si on décale l'axe des abscisses).

Calcul des coefficients : pour faciliter le calcul des coefficients a_n et b_n on profite au maximum des symétries de f(t) en choisissant astucieusement les origines des **temps** et des **ordonnées**. En effet, pour une fonction x(t) paire les coefficients b_n sont nuls et la décomposition en série de Fourier ne comporte que des cosinus (fonctions paires). Pour une fonction x(t) impaire les coefficients a_n sont nuls et la décomposition en série de Fourier ne comporte que des sinus (fonctions impaires).

Preuve : en prenant un intervalle d'intégration symétrique autour de l'origine on a :

$a_n=\frac{2}{T}\int_{t'}^{t'+T} f(t)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt$; si f(t) est impaire, $f(t)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)$ est aussi impaire et son intégration entre des bornes symétriques par rapport à 0 est nulle.

$b_n=\frac{2}{T}\int_{t'}^{t'+T} f(t)\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)dt$; si f(t) est paire, $f(t)\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)$ est impaire et son intégration entre des bornes symétriques par rapport à 0 est nulle.

Dimension : si x(t) est en Volt, les coefficients a_n et b_n sont aussi en Volt.

D) Changement d'origine temporelle d'un signal

Un changement d'origine temporelle du signal de t_0 se traduit par un changement d'origine de toutes les composantes sinus et cosinus de la SF :

$$f(t-t_0)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t-t_0)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos(2\pi\frac{n}{T}(t-t_0)+\varphi_n)\right)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos(2\pi\frac{n}{T}t-2\pi\frac{n t_0}{T}+\varphi_n)\right)$$

$$f(t-t_0)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos(2\pi\frac{n}{T}t+\varphi'_n)\right)$$

Le changement d'origine d'une fonction sinusoïdale $A\cos(\omega t+\varphi)$ ne change pas l'amplitude A de la fonction, mais simplement la phase φ.

Conséquence : l'**amplitude c_n** des harmoniques contient une information relative à la **forme** du signal (triangle, carré…), la **phase φ_n** des harmoniques contient une information relative à la position temporelle du signal et à la forme du signal.

E) Changement de la composante continue d'un signal

Comme on l'a vu lors de la signification du coefficient $\mathbf{c_0}$, si on change la composante continue du signal le seul terme de la décomposition en série de Fourier qui change est $\mathbf{c_0}$. On voit que les coefficients $\mathbf{c_n}$ qui donne l'amplitude des harmoniques pour n allant de **1 à l'infinie** caractérise **entièrement la forme du signal**. Le terme $\mathbf{c_0}$ représente la **composante continue** et donc seulement la **position moyenne** de ce signal.

F) Tracé du spectre d’un signal périodique

Après avoir décomposé le signal en série de Fourier sous la forme $f(t-t_0)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t+\varphi_n\right)\right)$, il est écrit sous la forme d’**une somme de composantes sinusoïdales**. Le tracé de l’amplitude c_n ($c_n\geq 0$ pour n>0) de chaque composante sinusoïdale, en fonction de sa fréquence $\frac{n}{T}$ compose ce que l'on appelle le spectre d’amplitude de ce signal.

Ce spectre n’est défini que pour des valeurs particulières de la fréquence. Il s’appelle le « **spectre de raies** ». Il représente l’amplitude de chaque fréquence qui compose le signal.

En génie électrique, on trace des spectres **en fonction de la fréquence.**

Le tracé du spectre du signal n’a pas seulement pour but de décrire le contenu fréquentiel du signal. Dans les applications, le signal est modulé, échantillonné..., son spectre est alors modifié. Il est **indispensable** de faire apparaître la fréquence de modulation ou d’échantillonnage en même temps que le spectre du signal. C’est pourquoi tous les spectres de ce cours (comme régulièrement en mathématiques) sont gradués en fonction de la fréquence et non pas en fonction du numéro de l’harmonique. Il suffit pour cela de considérer que l’harmonique n est de fréquence n/T.

II) Étude d’une décomposition en série de Fourier

On pose :

$a_0=1$; $a_n=\frac{\sin(n\pi/2)}{n}$; $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$, avec une période du signal est T=1s.

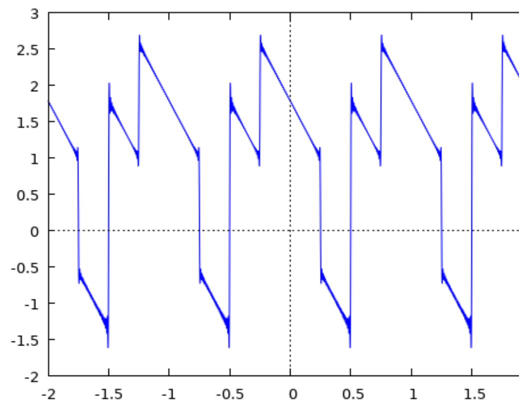


Illustration 1: somme pour n de 0 à 100

1) Que peut-on dire de la parité de cette fonction **à partir de cette décomposition** ? Pourquoi ?
2) Donner l’expression des 4 premiers harmoniques $h_n(t)$
3) Si on exprime la fonction sous la forme $f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t+\varphi_n\right)$, donner c_0 , c_1 , c_2 , c_3 et c_4 puis φ_1 , φ_2 , φ_3 et φ_4
4) Tracer le spectre d’amplitude jusqu’à la fréquence de 4Hz
5) Calculer la puissance moyenne contenue dans les 4 premières harmoniques et la composante continue.

2 Calculs de décompositions en séries de Fourier

I) Calculs de séries de Fourier pour des exemples simples

Exercice 1 :

Décomposition en série de Fourier d'un signal impulsionnel de période T, d'amplitude E, de largeur τ et de rapport cyclique $\frac{\tau}{T}=\frac{1}{2}$

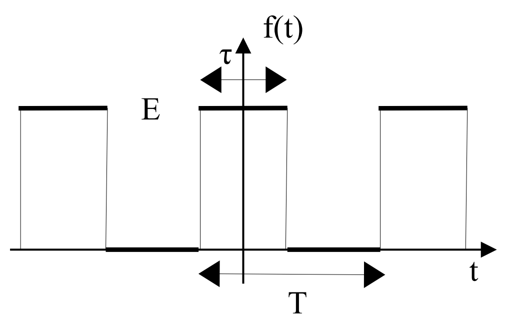


Figure 2: impulsion rectangulaire positif de largeur T et de rapport cyclique η = 1/2

1. Étudier la parité du signal. Que peut-on en conclure sur sa décomposition en SF.

2. f(t) est définie par morceau, écrire l'équation de f(t) sur une période
3. Calculer la valeur moyenne c_0
4. Calculer les coefficients a_n et b_n
5. Écrire la décomposition en série de Fourier de f(t).
6. Exprimer les coefficients c_n
7. Tracer sur un même graphique f(t) et les trois premiers harmoniques de sa décomposition en SF. Porter sur ce graphique ce que représentent les coefficients c_n de la décomposition en SF.
8. Tracer le spectre d'amplitude de f(t).
9. Calculer la puissance moyenne de chaque harmonique

<u>Exercice 2</u> :

Décomposition en série de Fourier d'un signal impulsionnel de période T, d'amplitude E, de largeur τ et de rapport cyclique

$$\frac{\tau}{T}=\frac{1}{2}$$

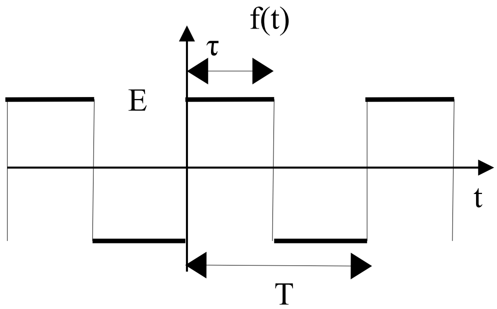


Figure 3: impulsion rectangulaire positif de largeur T et de rapport cyclique η = 1/2

1. Étudier la parité du signal. Que peut-on en conclure sur sa décomposition en SF.
2. f(t) est définie par morceau, écrire l'équation de f(t) sur une période
3. Calculer la valeur moyenne c_0
4. Calculer les coefficients a_n et b_n
5. Écrire la décomposition en série de Fourier de f(t).
6. Exprimer les coefficients c_n
7. Tracer sur un même graphique f(t) et les trois premiers harmoniques de sa décomposition en SF. Porter sur ce graphique ce que représentent les coefficients c_n de la décomposition en SF.
8. Tracer le spectre d'amplitude de f(t).
9. Calculer la puissance moyenne de chaque harmonique

<u>Exercice 3</u> : **(facultatif)**

Décomposition en série de Fourier d'un signal impulsionnel de période T, d'amplitude E, de largeur τ et de rapport cyclique

$$\frac{\tau}{T}=\frac{1}{2}$$

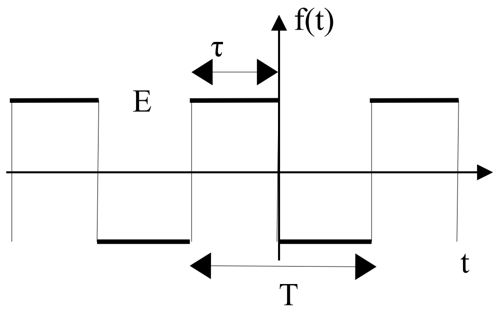


Figure 4: impulsion rectangulaire positif de largeur T et de rapport cyclique η = 1/2

1. Étudier la parité du signal. Que peut-on en conclure sur sa décomposition en SF.
2. f(t) est définie par morceau, écrire l'équation de f(t) sur une période
3. Calculer la valeur moyenne c_0
4. Calculer les coefficients a_n et b_n
5. Écrire la décomposition en série de Fourier de f(t).
6. Exprimer les coefficients c_n
7. Tracer sur un même graphique f(t) et les trois premiers harmoniques de sa décomposition

en SF. Porter sur ce graphique ce que représentent les coefficients c_n de la décomposition en SF.

8. Tracer le spectre d'amplitude de f(t).
9. Calculer la puissance moyenne de chaque harmonique

<u>Exercice 4</u> : **très important**

Décomposition en série de Fourier d'un signal impulsionnel de période T, d'amplitude E, de largeur τ et de rapport cyclique $\eta = \frac{\tau}{T}$

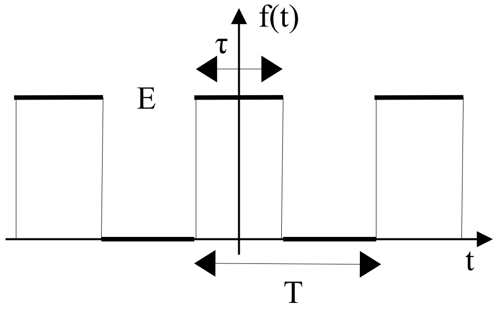


Figure 5: impulsion rectangulaire positif de largeur T et de rapport cyclique η = τ/ T

10. Étudier la parité du signal. Que peut-on en conclure sur sa décomposition en SF.
11. f(t) est définie par morceau, écrire l'équation de f(t) sur une période
12. Calculer la valeur moyenne c_0
13. Calculer les coefficients a_n et b_n
14. Écrire la décomposition en série de Fourier de f(t).
15. Exprimer les coefficients c_n
16. Dans le cas $\eta = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}$ tracer sur un même graphique f(t) et les trois premiers harmoniques de sa décomposition en SF. Porter sur ce graphique ce que représentent les coefficients c_n de la décomposition en SF.
17. Même question dans le cas $\eta = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{10}$.
18. Tracer le spectre d'amplitude de f(t) dans les 2 cas précédents.
19. Calculer la puissance moyenne de chaque harmonique

<u>Illustration</u> :

Les 2 courbes suivantes illustrent le tracé du spectre d'amplitude (les $c_n = |a_n|$) en fonction du numéro de l'harmonique n de l'impulsion rectangulaire avec le rapport cyclique $\eta = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}$ et $\eta = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$:

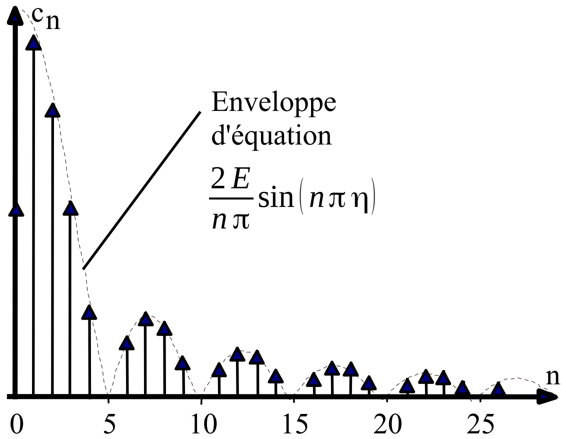


Figure 6: spectre d'amplitude d'un signal impulsion rectangulaire de rapport cyclique $\eta = \tau / T = 0.2$

pas de raie pour n = k/0.2=5k, pour n=5; n=10…

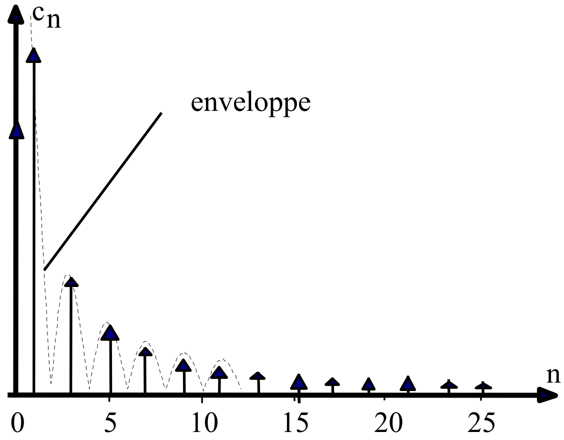


Figure 7: spectre d'amplitude d'un signal impulsion rectangulaire de rapport cyclique $\eta = \tau / T = 0.5$

pas de raie pour n = k/0.5=2k, pour n=2; n=4, n=6…

Exercice 5 :

Soit le signal dent de scie $x_1(t)$ représenté figure ci-contre.

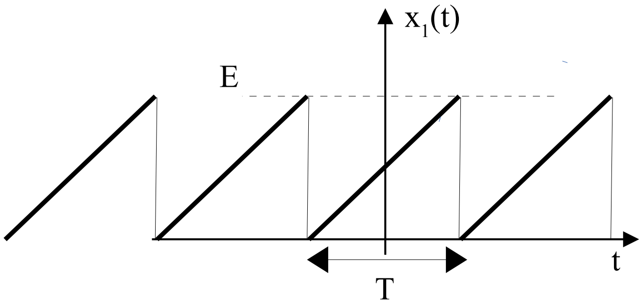


Figure 8: signal dent de scie de période T

1. Montrer que $x_1(t)$ peut s'écrire : $x_1(t) = x_2(t) + \text{constante}$ où $x_2(t)$ est un signal impair.
2. Étudier la parité du signal. Que peut-on en conclure sur sa décomposition en SF.
3. Calculer la valeur moyenne c_0 de $x_2(t)$.
4. Calculer les coefficients a_n et b_n de $x_2(t)$.
5. Écrire la décomposition en série de Fourier de $x_2(t)$.
6. En déduire la décomposition en série de Fourier de $x_1(t)$.
7. Exprimer les coefficients c_n de $x_1(t)$.
8. Tracer sur un même graphique $x_1(t)$ et les trois premiers harmoniques de sa décomposition en SF. Porter sur ce graphique ce que représentent les coefficients c_n de la décomposition en SF.
9. Tracer le spectre d'amplitude de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$.
10. Tracer la fonction $x_3(t) = x_1(t-T/2)$
11. Par un changement d'origine exprimer la décomposition en série de Fourier de $x_3(t)$ à partir de celle de $x_1(t)$.
12. Calculer la puissance moyenne de $x_1(t)$, de $x_2(t)$. Calculer la différence $P_{moy\,x_1} - P_{moy\,x_2}$.
13. Calculer la puissance moyenne de chaque harmonique de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$.

Exercice 6 (facultatif):

Soit le signal triangle x(t) représenté ci-contre.

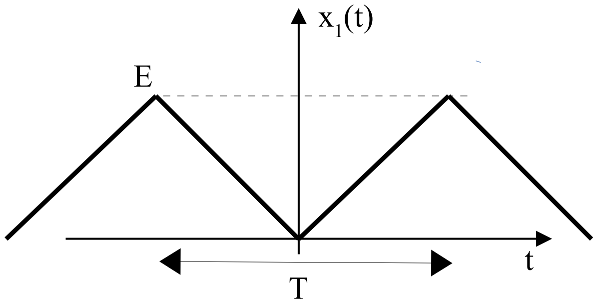
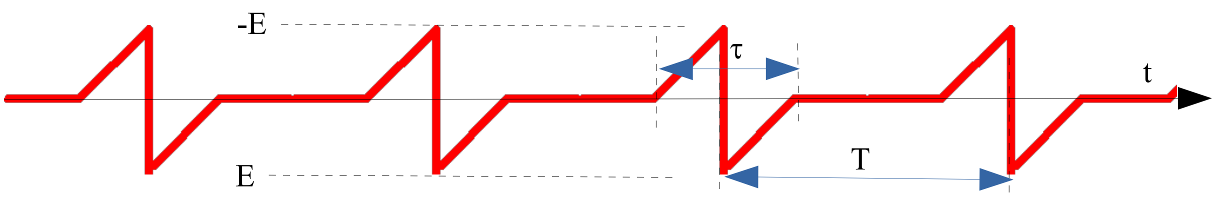


Figure 9: signal triangle de période T

1. Étudier la parité du signal. Que peut-on en conclure sur sa décomposition en SF.
2. Calculer la valeur moyenne c_0 de x(t).
3. Calculer les coefficients a_n et b_n de x(t).
4. Écrire la décomposition en série de Fourier de x(t).
5. Exprimer les coefficients c_n de x(t).
6. Tracer sur un même graphique x(t) et les trois premiers harmoniques de sa décomposition en SF. Porter sur ce graphique ce que représentent les coefficients c_n de la décomposition en SF.
7. Tracer le spectre d'amplitude de x(t).
8. Tracer la fonction $x_1(t) = x(t-T/2)$
9. Par un changement d'origine exprimer la décomposition en série de Fourier de $x_1(t)$ à partir de celle de x(t).
10. Calculer la puissance moyenne de x(t).
11. Calculer la puissance moyenne de chaque harmonique de x(t) et de $x_1(t)$.

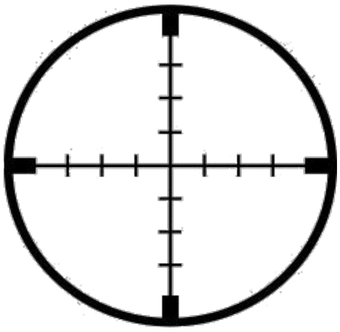
II) Résumé d'une étude de signal périodique avec Fourier

On a un signal périodique :

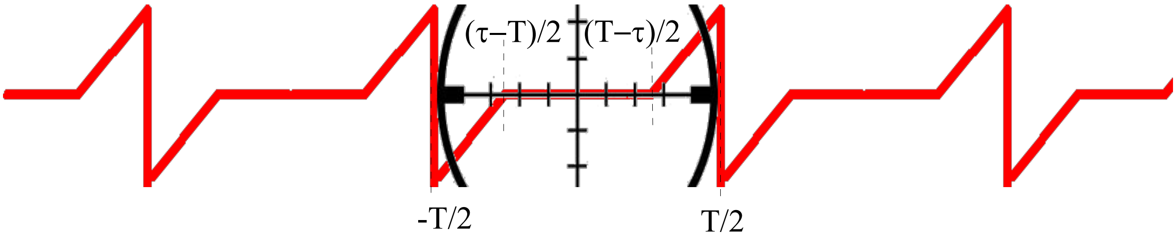


A) Choix de l’origine

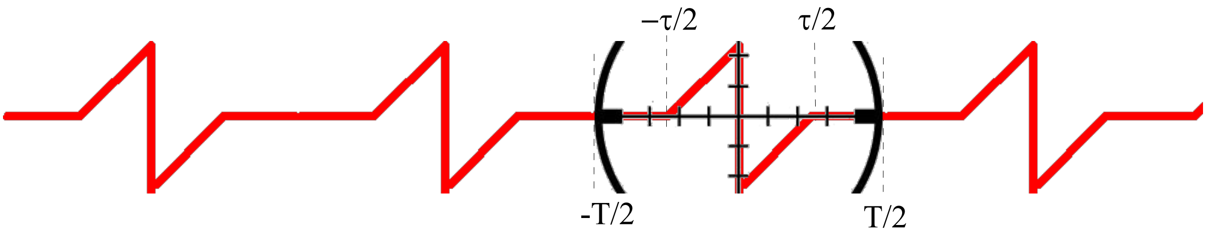
Pour se simplifier les calculs, on vise bien pour que la fonction qu’on va étudier soit paire ou impaire : ça divise par 2 le nombre de calculs.



On trouve deux endroits où mettre l’origine du repère pour avoir une fonction impaire (impossible d’avoir une fonction paire, pas grave, la difficulté est la même). Les voici :



ou



Pour ma part, je préfère la seconde, car la partie non nulle est au centre. Mais, l’autre possibilité est équivalente.

B) Simplification des calculs

1. La parité

Comme le signal (qu’on appellera x(t)) est impair, on ne calculera que les b_n, les a_n sont nuls. Le signal serait pair, ce serait l’inverse.

La formule est $b_n = \frac{2}{T} \int_{une\ période} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) x(t)\, dt$

On commence par centrer l’intervalle d’étude : $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) x(t)\, dt$.

x et sin étant impairs, le produit donne une fonction paire. Comme on intègre une fonction paire entre deux bornes opposées, on double et on prend l’intégrale de 0 à $\frac{T}{2}$: $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) x(t)\, dt$.

Ceci permet de n’avoir plus qu’un calcul d’intégrale à faire si comme dans notre cas il y a 2 équations différentes pour la partie positive et la partie négative. Quoi qu’il en soit, on fait cette simplification car généralement, elle apporte une simplification du résultat final.

2. Les parties nulles

Si on considère que la courbe (dans le second cas) est nulle entre $\tau/2$ et $T/2$, le calcul revient à

$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) x(t)\, dt$. (on pourrait supposer $\tau = T/2$)

C) Trouver l’équation de la courbe sur la partie à intégrer

Si on considère que la courbe varie de -E à E, ceci fait une pente de $\frac{E}{\tau/2} = \frac{2E}{\tau}$. Comme la (portion de) droite qu’on étudie passe en -E en t=0, ceci fait comme équation : $x(t) = \frac{2E}{\tau} t - E$.

D) Intégrer

$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} \sin\left(n \frac{2\pi}{T}\right) \left(\frac{2E}{\tau} t - E\right) dt$ => $b_n = \frac{2ET\,\sin\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right) - 2\pi E n \tau}{\pi^2 n^2 \tau}$ (par Maxima ici, sinon, il faut faire une intégration par partie)

$$b_n = \frac{2E}{(n\pi)^2}\frac{T}{\tau}\sin\left(n\pi\frac{\tau}{T}\right) - \frac{2E}{n\pi}$$

E) Mettre la bonne origine des temps.

Il est possible que pour simplifier le calcul on ait changé l'origine des temps ou modifier la valeur moyenne on réajuste.

F) Donner les formes de la série de Fourier

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\right) \text{ ou } x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t+\varphi_n\right)\right)$$

La seconde forme demande de savoir passer des a_n , b_n à c_n, φ_n .

G) Exploitation des résultats

On demande généralement de tracer les premiers harmoniques, le spectre d'amplitude, …

On peut aussi calculer la puissance des harmoniques (qui sont des sinusoïdes) *,

* : à ce sujet il est tout à fait possible qu'après avoir trouvé la forme de la fonction on vous demande de calculer sa puissance moyenne. La comparaison avec la puissance totale permet de trouver des égalités sur les limites de suites en mathématiques.

VII) Les matrices

1 Les matrices

I) Introduction

Une **matrice** est un tableau de valeurs composé de m lignes et n colonnes. Les matrices servent à mettre en œuvre les calculs complexes et lourds, généralement issus des résultats théoriques de l'algèbre linéaire. Toutes les disciplines étudiant des **phénomènes linéaires** utilisent les matrices.

Exemples d'application :

On trouve des matrices en théorie des probabilités et en statistique. L'idée centrale de l'algorithme PageRank utilisé par Google est d'évaluer une énorme matrice stochastique (probabiliste).

En théorie des graphes, à tout graphe non orienté correspond une matrice.

L'imagerie numérique nécessite de lourds calculs matriciels. Ainsi, les transformations géométriques usuelles (rotation, translation, symétrie, projection, …) s'écrivent sous forme matricielle.

En traitement du signal, en théorie des codes, on utilise des matrices pour la mise en œuvre des algorithmes. Des processeurs vectoriels spécialisés (Digital Signal Processor) permettent le calcul rapide et efficace de ces calculs matriciels.

En automatique et pour l'étude plus évoluée des systèmes, on utilise une formulation matricielle (forme d'état).

L'optique géométrique (les lentilles qui composent un zoom) se formalise aussi sous forme matriciel.

II) Définitions

Une matrice A à m lignes et n colonnes est un tableau rectangulaire de mxn nombres, rangés ligne par ligne. Il y a m lignes, et dans chaque ligne n nombres.

Pour indiquer le type de matrice (la taille) on note que A est une matrice (m,n)

(nombre de lignes, nombre de colonnes).

Chacun des éléments de la matrice se note a_{ij}. Le premier indice i indique le numéro de la ligne, le second indice j indique le numéro de la colonne. La matrice peut alors être notée : A=(a_{ij})

Par exemple, pour A une matrice (2,3), les coefficients $a_{i,j}$ compose la matrice avec i compris entre 1 et 2 désignant le numéro de la ligne, et j compris entre 1 et 3 désignant son numéro de colonne.

On représente généralement une matrice sous la forme d'un tableau rectangulaire entouré de parenthèses. Par exemple pour une matrice (2,3):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$ (la seconde notation est désuette)

Matrice carrée : une matrice pour laquelle le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes est dite carré de taille (ou d'*ordre*) n.

Par exemple pour une matrice (2,2) : $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Matrice ligne : une matrice ne comportant qu'une seule ligne et n colonnes est appelée matrice ligne de taille n. On parle généralement de **vecteur ligne**.

Par exemple pour une matrice (1,3) : A=(2 -3 1)

Matrice colonne : Une matrice comportant *m* lignes et une seule colonne est appelée matrice colonne de taille *m*. On parle généralement de **vecteur colonne**.

Par exemple pour une matrice (3,1) : $A=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$

Coefficients diagonaux et diagonale de la matrice : les coefficients $a_{i,j}$ avec i=j sont dits **diagonaux**. On appelle **diagonale** de A le vecteur composé des éléments diagonaux :

$$diag(A)=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{22}\\\vdots\\a_{pp}\end{pmatrix}$$ avec p=min(m,n)

Désignation des lignes et colonnes : pour effectuer certaines opérations, il peut être utile de désigner les lignes (L_i) ou les colonnes (C_j) d'une matrice. On pourra alors l'écrire sous une des formes suivantes

$$diag(A)=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{pmatrix}$$ ou A=(C_1 C_2 … C_n)

Matrice transposée

La matrice transposée A^T parfois notée « ^tA » d'une matrice A est la matrice obtenue en écrivant les lignes de A en colonnes, ou, ce qui est identique, les colonnes de A en lignes. La transposée d'une matrice *(n,m)* est une matrice *(m,n)*. Ainsi la matrice A=(a_{ij}) a pour transposée A^T=(a_{ji}).

Par exemple pour une matrice (2,3) : $A=\begin{pmatrix}3&4\\1&-1\\0&2\end{pmatrix}$ => $A^T=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$

La transposée d'une matrice ligne est donc une matrice colonne.

Propriété : en appliquant 2 fois l'opération de transposition, on retrouve la matrice d'origine :

$(A^T)^T=A$

III) <u>Opération sur les matrices</u>

A) *Égalité de 2 matrices*

Deux matrices A=(a_{ij}) et B=(b_{ij}) sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux, i.e. $a_{ij}=b_{ij}$ pour toutes les valeurs de i et j.

B) *Addition*

La somme de deux matrices de même type (m,n) A=(a_{ij}) et B=(b_{ij}) est la matrice C de même type (m,n) obtenue en ajoutant 2 à 2 les éléments correspondants (même ligne, même colonne) de A et B.

A+ B = C avec : $(a_{ij})+(b_{ij})=(c_{ij})$ avec $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

On ne peut additionner que deux matrices de même taille.

Exemple : $\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&-1\\-1&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1&-1\\0&-1&7\end{pmatrix}$

Matrice nulle : on appelle matrice nulle O de type (n,m) la matrice composée uniquement de 0. Cette matrice est l’élément neutre pour l’addition des matrices : A+O = O + A = A

Propriétés :

associativité : A+(B+C) = (A+B)+C

élément neutre : la matrice nulle O

opposée : la matrice (-A) est l’opposée de la matrice A : A+(-A) = O

commutativité : A+B = B+A

C) Multiplication par un scalaire

On définit le **produit** (noté **.**) d’une matrice A(n,m) par le scalaire λ comme :

$\lambda A=\lambda.(a_{ij})=(\lambda\, a_{ij})$

Exemple : $2\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$

Propriétés :

distributivité : $\lambda.(A+B) = \lambda.A +\lambda.B$

distributivité : $(\lambda_1+\lambda_2).A = \lambda_1.A +\lambda_2.A$

distributivité : $(\lambda_1\lambda_2).A = \lambda_1.(\lambda_2.A)$

produit par 0 : 0.A = O la matrice nulle

produit par 1 : 1.A = A

Exercice: calculer C = 2A+3B avec $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

D) Produit matriciel

On commence par définir le produit d’une matrice ligne (1,p) (avec p colonnes), par une matrice colonne (p,1) (avec p lignes). Soit L une matrice ligne, x_i ses n coefficients, C une matrice colonne, y_i ses p coefficients. Le produit de ces deux matrice est un scalaire considéré comme une matrice de dimension (1, 1) :

$$L\cdot C=\begin{pmatrix}x_1\,x_2 \ldots x_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\cdot y_i\right)$$

Le produit n'est **possible** que si le nombre de colonne de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice.

Exemple : calculer AB, A_1B, AB_1 et A_1B_1 avec A=(1 2 3), $B=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$, A_1=(-1 0 2) et $B_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$.

On définit plus généralement un produit entre deux matrices, la première (x_{ij}) de taille (m,p), la deuxième (y_{ij}) de taille (p,n), toujours avec une condition de compatibilité sur les tailles : le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde matrice. Le résultat du produit est une matrice $(z_{i,j})$ de taille (m,n), dont les coefficients sont obtenus par :

$$z_{ij}=\sum_{k=1}^{p} x_{ik}\cdot j_{kj}=x_{i1}\cdot j_{1j}+x_{i2}\cdot j_{2j}+...+x_{ip}\cdot j_{pj}$$

En s'inspirant de la multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne, on peut reformuler cette définition en disant que ce coefficient est égal au produit de la ligne *i* de la première matrice par la colonne *j* de la deuxième. Soit L_i les p lignes de la première matrice, et C_j les p colonnes de la deuxième, le produit est :

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & ... & L_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & ... & L_1C_n \\ L_2C_1 & L_2C_2 & ... & L_2C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_mC_1 & L_mC_2 & ... & L_mC_n \end{pmatrix}$$

Exemple : Pour comprendre l'emplacement des éléments, on calculera simplement BA, avec A=(1 2 3), B^T=(4 5 6),

Une première remarque s'impose AB et BA sont différents.

Exemple : On continue avec les mêmes matrice A, A_1, B et B_1 que précédemment.

On calcule $\begin{pmatrix} A \\ A_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B & B_1 \end{pmatrix}$ pour avoir le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A\,B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B\,A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Associativité : (AB) C = A (BC)

distributivité : A(B+C) = A B + A C

distributivité : (B+C) A = BA + CA

Le produit matriciel est associatif, distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition matricielle.

Le **produit de matrices** n'est en général **pas commutatif** : *AB* n'est pas égal à *BA*, comme c'est illustré dans l'exemple au-dessus. De plus, dans le cas général si la condition de taille pour l'existence du produit est vérifié pour le produit AB, elle ne l'est pas pour le produit BA (sauf dans le cas de matrice carré).

Remarque : le produit de deux matrices non nulles peut être nul, comme l'exemple au-dessus.

Exercice: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ [redacted]

Calculer A B + A C puis A(B+C) et vérifier que le résultat est identique

E) Propriétés des matrices transposées :

$(A+B)^T=A^T+B^T$

$(kA)^T=k(A^T)$

$(AB)^T=B^TA^T$

2 Matrices carrées (n,n) et exemples

I) Matrices carrées (n,n)

On considère l'ensemble des matrices carrés de taille (n,n), possédant n² éléments. Elle a donc le même nombre de lignes que de colonnes.

Matrice diagonale: une matrice carrée est dite diagonale si tous ses termes sont nuls à l'exception des termes diagonaux : ($a_{i,j}$=0 si i≠j) et ($a_{i,j}$≠0 si i=j)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A) Déterminant des matrices carrés

Pour toute matrice **carrée** A correspond une valeur appelée le déterminant de A, notée det(A) :

det(A)=|A|

Les matrices sont notées avec des parenthèses, les déterminants avec des barres (comme une valeur absolue).

Nous nous limitons ici au calcul des déterminants des matrices 2x2 (et 3x3 pour information). En pratique le calcul du déterminant se fait avec un logiciel.

1. Déterminant des matrices 2x2

$$det(A)=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} |\square| = xy' - yx'$$

2. Déterminant des matrices 3x3 (ne pas faire)

Pour le calcul, on développe un déterminant 3x3 en 3 déterminants 2x2.

Le mineur $M_{i,j}$ est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de la matrice A. On raye la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne et on prend le déterminant de ce qui reste.

Le cofacteur $C_{i,j}$ est le mineur M_{ij} avec un signe $(-1)^{i+j}$

Pour le calcul du déterminant :

- Choisir une rangée ou une colonne de A (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros)…
- Multiplier chacun des éléments $a_{i,j}$ de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur $C_{i,j}$ correspondant.
- Faire la somme de ces résultats.

Par exemple si on développe le déterminant suivant la première colonne on a :

[redacted]

On peut résumer la règle des signes des cofacteurs par le schéma suivant :

[redacted]

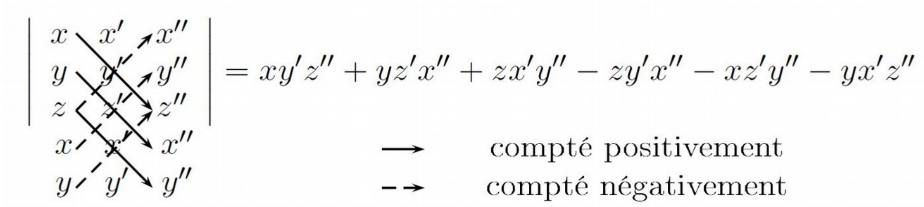
Le calcul développé donne :

[redacted]

Cette méthode de calcul s'applique à tout déterminant de taille (n,n), qu'on peut ainsi développer en fonction de ses cofacteurs de taille ((n-1),(n-1))

Dans le cas des déterminants 3x3, on peut effectuer le calcul directement comme la somme de 6 termes :

- 3 comptés positif (flèches continues)
- 3 comptés négatif (flèches pointillés)



Exercice: Calculer : det(A) : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; det(B) **:** $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$

Exercice: calculer det(AB) avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; [redacted]

Propriétés :

- En ajoutant à une ligne un multiple d'une autre, on ne change pas un déterminant.
- En ajoutant à une colonne un multiple d'une autre, on ne change pas un déterminant.
- On utilise ces propriétés pour obtenir des 0 dans une ligne ou une colonne et ainsi simplifier le calcul du déterminant.
- $\det(A^T)=\det(A)=|A|$
- $\det(\alpha A)=\alpha^n|A|$ si A est une matrice carrée nxn
- det(AB)=Det(A)det(B)=|A||B| si A et B sont deux matrices carrées nxn
- Si on échange 2 lignes d'un déterminant, celui-ci change de signe en gardant la même valeur absolue.
- Si on échange 2 colonnes d'un déterminant, celui-ci change aussi de signe en gardant la même valeur absolue.

B) Matrice identité, élément neutre pour le produit de matrices

On appelle **I_n matrice identité de taille n**, la matrice diagonale de taille n dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 : on note **I** si on ne veut pas préciser la taille de la matrice identité,

[redacted]; I a des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs

Propriété : la matrice identité est l'élément neutre pour le produit matriciel : A I = I A = A

Remarque : le produit par la matrice I est commutatif, c'est un cas particulier.

Exercice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer A I et I A

Exercice: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer A^2, A^3, A^4, en déduire par un raisonnement par récurrence A^n

Exercice: [redacted] Calculer A^T, A^TA, AA^T

C) *Inverse d'une matrice carrée*

Une matrice carrée *A* (*n*, *n*) est dite **inversible** s'il existe une matrice *B* de taille (*n*, *n*) telle que $AB = BA = I_n$. Si B existe, elle est unique. On la note $B=A^{-1}$; $AA^{-1} = A^{-1} A = I$

Calcul de l'inverse : une méthode simple mais laborieuse pour calculer la matrice inverse consiste à rechercher l'ensemble des coefficients qui la compose.

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ posons pour la matrice inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On effectue le produit AA^{-1} et on identifie avec la matrice unité I.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient un système de 4 équations dont les solutions sont : a=1 ; d=1 ; b=-1 ; c=0

Soit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En pratique le calcul de l'inverse se fait par un logiciel, on donne juste le cas des matrices 2x2

1. *Inverse des matrices 2x2*

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

cette formule n'est pas à retenir et vous sera donnée si vous en avez besoin au DS !

Exemple : vérifier le calcul précédent $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Propriétés : La valeur de det(A) permet de vérifier l'inversibilité de la matrice A par l'équivalence suivante : **A inversible <=> det(A) ≠0**

<u>Remarque</u> : on peut montrer que A^{-1} peut s'écrire : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} Com^T$ où *Com* est la comatrice ou matrice des cofacteurs de A. $Com = (C_{ij})$ avec Cij le cofacteur égal à $(-1)^{i+j}$ multiplié par le déterminant de la matrice A où on a enlevé la ligne i et la colonne j. On remarque que A^{-1} existe seulement si [redacted] (voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_inversible)

II) <u>Utilisation des matrices</u>

A) *Utilisation des matrices pour la résolution des systèmes d'équations linéaires*

Un système de *n* équations linéaires à *n* inconnues peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où x_1, x_1, …. , x_n sont les inconnues et les nombres a_{ij} sont les coefficients du système.

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle :

A X = B

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

La matrice A est de dimension (n,n).

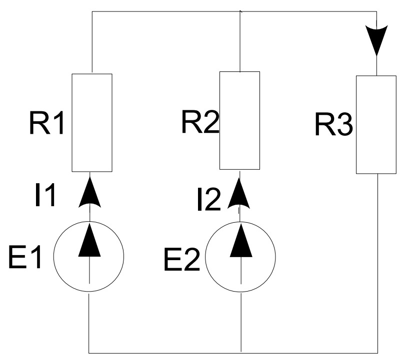
Le système a une solution si le déterminant de la matrice A est différent de 0. On peut alors calculer son inverse A^{-1}.

En multipliant à gauche les deux membres de l'équation par A^{-1} : A^{-1} A X = A^{-1} B

ce qui donne pour le vecteur X des inconnues : X = A^{-1} B

B) Application à l'électricité (facultatif)

Soit le circuit électrique suivant :



- écrire les équations des mailles
- mettre ces équations sous forme matricielle
- en déduire les valeurs de I1 et I2

$E_1-R_1I_1=E_2-R_2I_2=R_3(I_1+I_2)$

$$\begin{cases} (R_1+R_3)I_1 + R_3I_2 = E_1 \\ R_3I_1 + (R_2+R_3)I_2 = E_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (R_3+R_1) & R_3 \\ R_3 & (R_2+R_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

soit RI=E => $I=R^{-1}E$

AN : $R_1=1\Omega$; $R_2=2\Omega$; $R_3=3\Omega$; $E_1=5V$; $E_2=3V$;

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 16 \\ -3 \end{pmatrix}$$ => $I_1=1{,}45$ A ; $I_2=-0{,}273$ A

C) Application à la régression linéaire (*)

Soit N couples de points expérimentaux ((x1,y1),…,(x_n,y_n)). On cherche la droite passant « au mieux » par ces points expérimentaux.

Soit y=ax+b , l'équation de la droite recherchée. On cherche les valeurs (a, b) telle que la droite passe « au mieux » par les points expérimentaux.

On écrit cette équation pour l'ensemble des N couples de données.

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \\ \vdots \\ ax_N + b = y_N \end{cases}$$

Ce système de N équations n’a pas de solution, car le nombre N d’équations est généralement très supérieur à 2, le nombre d’inconnues (a, b). On peut le mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$ ou X D = Y

avec : $X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$

D est le vecteur des inconnues de la droite de régression linéaire recherchée.

La matrice X, de dimension (N,2), n’est pas carrée et donc non inversible.

On effectue de produit de l’équation à gauche par la matrice X^T qui est de dimension (2,N).

$X^T XR = X^T Y$

$X^T X$ est une matrice carrée de taille (2,2). $X^T Y$ est un vecteur de taille (2,1).

Si la matrice $X^T X$ est inversible, le vecteur inconnu D s’écrit :

$D = (X^T X)^{-1} X^T Y$

La solution ainsi trouvée s’appelle la solution au sens des moindres carrés (Least Mean Square).

La matrice $(X^T X)^{-1} X^T$ s’appelle la pseudo-inverse de X.

<u>Exemple</u> : Soit 3 couples de points expérimentaux

x_i	0	1	2
y_i	1	2	4

1. Tracer les 3 points dans le plan
2. On cherche la droite y=ax+b passant « au mieux » par ces points expérimentaux. Ecrire l’équation de la droite passant par chacun des 3 points de coordonnées (x_i, y_i)
3. Mettre le système sous forme matriciel :X D = Y
4. En déduire les valeurs de a et b.
5. Tracer la droite de régression linéaire. Vérifier avec Excel les valeurs de (a, b) de la droite de tendance dans le graphique.

VIII) Matrices, applications linéaires et bases

Tous les ensembles sur lesquels on travaillera seront munis de lois qui en feront des espaces vectoriels.

1 Les matrices et les applications linéaires

I) Générer une application linéaire à partir d'une matrice

On va faire un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

Le vecteur de coordonnées (x,y,z) est considéré comme la matrice colonne $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Soit la matrice $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule MX, on obtient alors une matrice colonne. On considère l'application f qui à (x,y,z) fait correspondre l'élément de $\mathbb{R}^3$ qu'on vient de trouver par la précédente multiplication. Montrez que cette application est une application linéaire.

II) Générer une matrice à partir d'une application linéaire

1) On travaille dans l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 : $\mathbb{R}^3[X]$.

Montrer que l'application qui à $P \in \mathbb{R}^3[X]$ associe Q=3P+P'+x²*P'' est une application linéaire interne à $\mathbb{R}^3[X]$.

Trouver les images de x^3, x^2, x et 1 par cette application.

En déduire la matrice associée à cette application dans la base (x^3, x^2, x, 1), appelée aussi base canonique.

2) Montrer que l'application qui à $P \in \mathbb{R}^3[X]$ associe P'' est une application linéaire. Quel est l'ensemble image.

Trouver les images de x^3, x^2, x et 1 par cette application.

En déduire la matrice associée à cette application de $\mathbb{R}^3[X]$ dans $\mathbb{R}^1[X]$ en utilisant les bases canoniques.

III) Rang d'une matrice ou d'une application linéaire

Le rang d'une application linéaire est la dimension de l'image. Il en est de même pour la matrice associée.

IV) Cas des matrices carrées

D'un point de vu matrice, c'est un cas particulier. Mais, si la dimension de l'espace d'arrivée est la même que celle de l'ensemble de départ, nous avons une matrice carrée. Comme on a souvent des applications d'un ensemble dans lui même, nous avons souvent des matrices carrées.

Si le rang d'une application linéaire n'est pas égal à la dimension de l'espace, c'est que les vecteurs images d'une base ne forment pas une base : c'est une famille liée. Ceci se voit simplement si on peut trouver un vecteur u non nul tel que f(u)=0.

Dans ce cas le déterminant de la matrice est nul.

2 Les matrices et les changements de base

I) Matrices de passage

Soit les coordonnées d'une base B' dans une base B.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ de coordonnées respective (1,1,0), (2,0,2) et (0,3,3) dans la base canonique. Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Supposons qu'on connaisse les coordonnées d'un autre vecteur dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, par exemple :

$\vec{a}=\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$. Donnez les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base canonique.

$b=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$. Donnez les coordonnées α,β,γ de b dans la base canonique.

1) Montrez que l'application qui à (x,y,z) associe (α,β,γ) est une application linéaire. Donnez sa matrice associée. Cette matrice est appelée la matrice de passage de B' vers B, notée $P_B^{B'}$. Expliquez comment on peut facilement la construire.

2) Par quelle opération matricielle peut-on trouver l'application qui associe (x,y,z) à (α,β,γ) ?

Trouver cette matrice.

C'est la matrice de passage de B vers B' notée $P_{B'}^{B}$.

3) Les trois vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ont été choisis car nous avons une application linéaire f qu'on peut définir simplement avec eux : $f(\vec{u})=\vec{u}$, $f(\vec{v})=\vec{v}/2$ et $f(\vec{w})=\vec{w}/3$.

Donnez la matrice M' de f dans la base B'$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Trouvez la matrice M de f dans la base canonique. Pour ceci, on va commencer par chercher pour chacun des trois vecteurs de la base leur image grâce aux matrices de passage précédemment calculées.

Identifier l'opération matricielle qui permet de passer de M' à M.

II) Exemples pratiques

A) *Écrasement ou étirement d'une image*

On suppose qu'on déforme une image en doublant la longueur suivant l'axe a_1 (1,2) et en divisant par 2 sa longueur suivant l'axe a_2 (1,-1).

Donnez la matrice N de cette application linéaire dans la base (a_1,a_2).

Donnez la matrice P de passage de la base (a_1,a_2) vers la base canonique.

Calculez la matrice de passage de la base canonique vers la base (a_1,a_2).

Donner la matrice N_1 de cette déformation dans la base canonique.

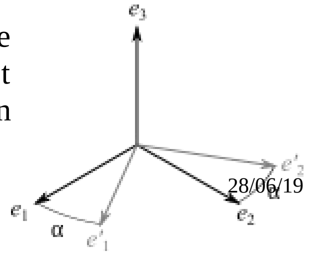
Vérifier que dans la base canonique, la définition de la transformation est bien respectée.

On suppose qu'on effectue n fois cette transformation. Ceci correspond à quelle matrice dans la base (a_1,a_2) ? En déduire la matrice dans la base canonique.

Maintenant que nous avons la matrice de cette déformation dans la base canonique, on va pouvoir donner les images des points dont les coordonnées dans la base canonique sont : (1,1),(1,-1), (-1,-1) et (-1,1).

B) *Matrice de rotation dans l'espace **

On peut repérer une rotation grâce à son axe de rotation et l'angle de rotation. Avec une base orthonormée directe, la matrice d'une rotation est très facile à exprimer. On suppose que la base est (e_1,e_2,e_3) . L'axe de rotation



est l'axe e_3 et l'angle de rotation α comme le dessin ci-contre.

La matrice de cette rotation est alors très simple : $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mais, tout mouvement ne se fait pas par rapport aux axes du repère. Supposons que l'axe de rotation e_3 ait comme coordonnées (1,1,1). Le premier axe perpendiculaire choisi sera celui de coordonnées : e_1 ($\sqrt{3}$,- $\sqrt{3}$,0) et le second e_2 (1,1,-2).

Vérifier que :

- les trois vecteurs sont deux à deux perpendiculaires (produit scalaire)

- la base (e_1,e_2,e_3) est directe (produit vectoriel)

- e_1 et e_2 sont de même longueur.

Ces 3 conditions sont suffisantes pour avoir la matrice simple pour exprimer la rotation. Le seul calcul compliqué que nous avons à faire est celui de la matrice inverse. Nous laisserons ce travail à un ordinateur qui va nous trouver : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifier que cette rotation s'exprime comme ceci dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sin(\alpha)}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}\left(\frac{\cos(\alpha)}{2\sqrt{3}}-\frac{\sin(\alpha)}{6}\right)+\frac{\cos(\alpha)}{6}+\frac{1}{3} & -\frac{\sin(\alpha)}{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\left(\frac{\sin(\alpha)}{6}+\frac{\cos(\alpha)}{2\sqrt{3}}\right)+\frac{\cos(\alpha)}{6}+\frac{1}{3} & \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{3}}-\frac{\cos(\alpha)}{3}+\frac{1}{3} \\ \frac{\sin(\alpha)}{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\left(\frac{\cos(\alpha)}{2\sqrt{3}}-\frac{\sin(\alpha)}{6}\right)+\frac{(\alpha)}{6}+\frac{1}{3} & -\frac{\sin(\alpha)}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}\left(\frac{\sin(\alpha)}{6}+\frac{\cos(\alpha)}{2\sqrt{3}}\right)+\frac{\cos(\alpha)}{6}+\frac{1}{3} & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{3}}-\frac{\cos(\alpha)}{3}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}-2\left(\frac{\sin(\alpha)}{2\sqrt{3}}+\frac{\cos(\alpha)}{6}\right) & \frac{1}{3}-2\left(\frac{\cos(\alpha)}{6}-\frac{\sin(\alpha)}{2\sqrt{3}}\right) & \frac{2\cos(\alpha)}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ces calculs peuvent être important pour prévoir les mouvements de bras articulés. Ils sont très facilement faisable avec des ordinateurs, par exemple avec wxmaxima :

```
m: matrix ([sqrt( 3),1,1],[-sqrt( 3),1,1],[0,-2,1]);
m1:invert(m);
r:matrix([cos(alpha),-sin(alpha),0],[sin(alpha),cos(alpha),0],[0,0,1]);
m.r.m1;
```

3 Diagonalisation de matrices

Nous venons de voir qu'on peut avoir des définitions plus simples des applications linéaires si on choisit bien la base.

La diagonalisation de matrice revient à chercher une base où l'image de chaque vecteur de la base est un vecteur colinéaire (comme dans le cas de l'écrasement de l'image).

On cherche un couple vecteur/coefficient (u/ λ)qui vérifie f(u)= λ u.

I) Vecteur propre/valeur propre

λ est appelé valeur propre, u est le vecteur propre. Ils sont dits associés car pour une application linéaire il peut exister d'autres couples de vecteurs propres/valeurs propres.

Application : Trouver les vecteurs propres de l'application « Écrasement ou étirement d'une image ».

Ce couple vérifie f(u)= λ ou f(u)- λ u=0. C'est à dire que la matrice associée à l'application linéaire f(x)- λ x a un déterminant nul. Si la matrice associée à f(x) est M, celle associée à f(x)- λ x est (M- λ I).

Pour trouver les valeurs propres, on va résoudre l'équation det(M- λ I)=0 sachant que det(M- λ I) est un polynôme de degré n (n dimension de l'espace vectoriel).

II) <u>Exemples</u>

1) Par le calcul, trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 \\ 0.0 & 2.0 \end{pmatrix}$. (cette matrice devrait vous rappeler quelque chose, vous devez pouvoir alors vérifier les résultats)

2) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice : $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Avec cette matrice, nous avons un cas particulier de racine complexe => 1 valeur propre réelle et un seul vecteur propre.

3) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Nous avons un autre cas qui peut arriver avec une valeur propre multiple : elle n'a qu'un seul vecteur propre associé. En règle générale, une valeur propre multiple d'ordre n a entre 1 et n vecteurs propres.

Alphabet grec

Nom	minuscule	Majuscule	Nom	minuscule	Majuscule
alpha	α	Α	nu	ν	Ν
bêta	β	Β	ksi ou xi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	ο	Ο
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ϵ	Ε	rhô	ρ	Ρ
zêta	ζ	Ζ	sigma	σ *	Σ
êta	η	Η	tau	τ	Τ
thêta	θ	Θ	upsilon	υ	Υ
iota	ι	Ι	phi	φ	Φ
kappa	κ	Κ	khi	χ	Χ
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu	μ	Μ	oméga	ω	Ω

* : en fin de mot les Grecs mettaient plutôt ς pour le sigma.

Index lexical