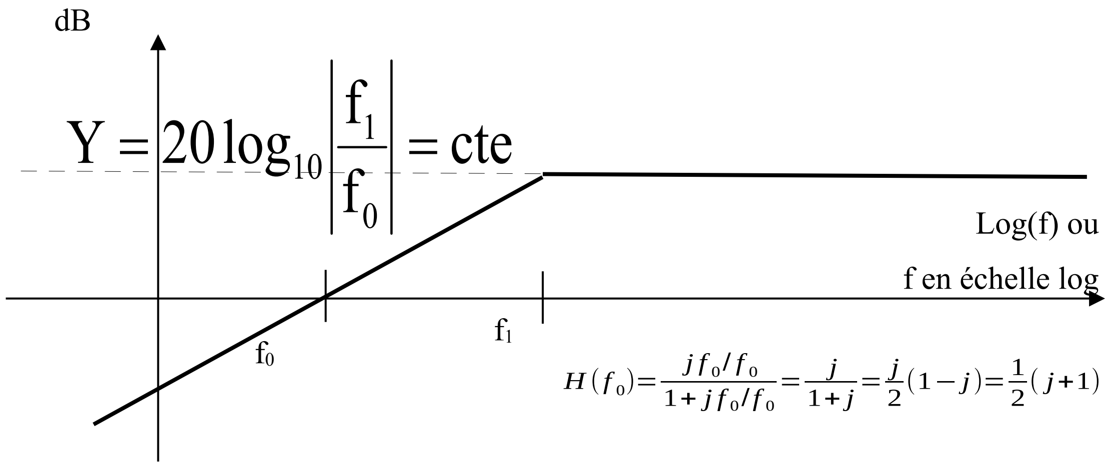
Ressource OML – Semestre 1

Outils Mathématiques et Logiciels

Version TD

Document impression



Par :
Adrian BASARAB
Hervé LIEBGOTT
Bruno NEYRAN
Bernard SIAUD

Table des matières

Vous avez sur v:/Module_OML1 la version pdf complète de ce poly avec des corrections et le cours complet pour plus d'approfondissements.

Dans ce fascicule de mathématiques, vous pouvez voir des paragraphes marqués d'un astérisque. Ces paragraphes ne sont pas traités en TD parce qu'ils abordent des notions qui vont un peu au-delà du programme et peuvent permettre de le prolonger pour les étudiants intéressés. Leur présence donne plus de cohérence aux notions traitées.

Organisation du cours

Le cours de Outils Mathématiques et Logiciels (OML) se décompose de la manière suivante au semestre 1 :

13 séances de TD de 1h30, OML1-A, de la semaine 1 à 7, puis semaine 9 à 14

7 séances de TD de 2 h, OML1-B, de la semaine 1 à 7

7 séances de TP de 2 h, OML1-B, de la semaine 9 à 15

La semaine 8 est consacrée entièrement aux SAÉ

Au niveau des contrôles, vous aurez 2 DS de 1 h 30 qui portent sur les TD effectués jusqu'à ce moment-là, aussi bien en OML1-A, qu'en OML1-B. Une note TD/QCM à faire entre chaque séance, la note de QCM du début de l'année. La dernière séance de TP sera consacrée à un contrôle.

La note finale de OML sera la moyenne de ces cinq notes.

Cours OML1-A

Révision utile

Faire les QCM de révision Réussir à l'IUT, sur le site « IUT en ligne »

https://reussir.iutenligne.net/course/view.php?id=993#section-0

en choisissant le positionnement par thème pour identifier ce qui n'est pas acquis, puis dans Entraînement par thème, et Avancement par thème pour approfondir vos révisions.

Certains thèmes sont nouveaux pour certains d'entre vous, vous les verrez ce semestre.

Les GROS points faibles à palier au départ sont les calculs de base, Développement et factorisation, Équations du premier degré, Fractions.

Il faut aussi revoir les raisonnements mathématiques de base, Lire et interpréter un énoncé, Proportionnalité et pourcentages, Représentations graphiques - Construction et exploitation d'un graphe, Trigonométrie, Dérivation.

Semaine 1 : Le cercle trigonométrique

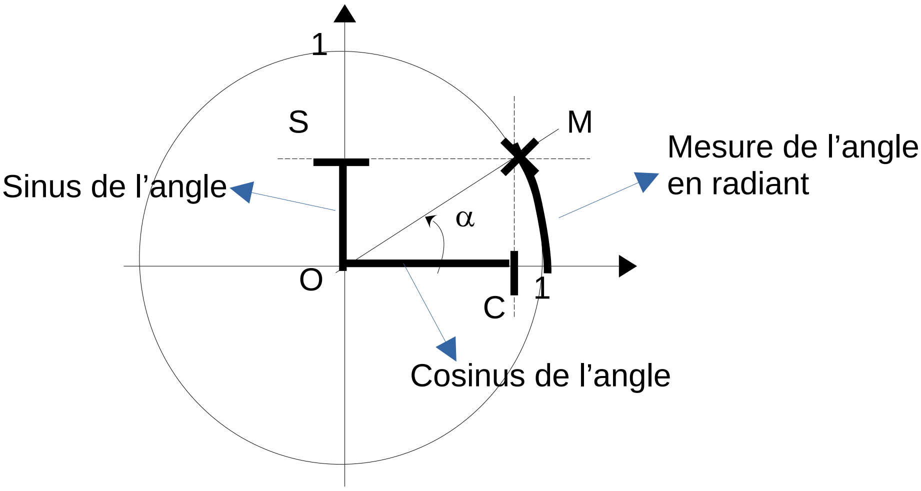
I) Définition

En mathématiques, le cercle trigonométrique, ou cercle unité, est un cercle qui permet d'illustrer et de définir des notions comme celles d'angle, de radian et les fonctions trigonométriques : cosinus, sinus, tangente. Il s'agit du cercle dont le rayon est égal à 1 et qui est centré sur l'origine du repère, dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.

Ce cercle est très pratique pour visualiser les fonctions trigonométriques.

A) *Le radian*

On place un point M sur ce cercle, et on considère C l'abscisse de M sur l'axe horizontal, et S l'ordonnée de M sur l'axe vertical. Soit α l'angle formé par OM et l'axe des abscisses. On appelle mesure de l'angle α **en radiant**, la longueur de l'arc du cercle trigonométrique compris entre l'axe des abscisses et le point M.



Sinus

Si on considère un arc qui fait la circonférence du cercle, comme le rayon est de 1, la longueur de la circonférence est de 2π . L'angle correspondant à un tour de cercle est donc 2π . De même l'angle correspondant à un demi-tour de cercle est π , et celui correspondant à un quart de tour de cercle est donc $\frac{\pi}{2}$

B) *Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus*

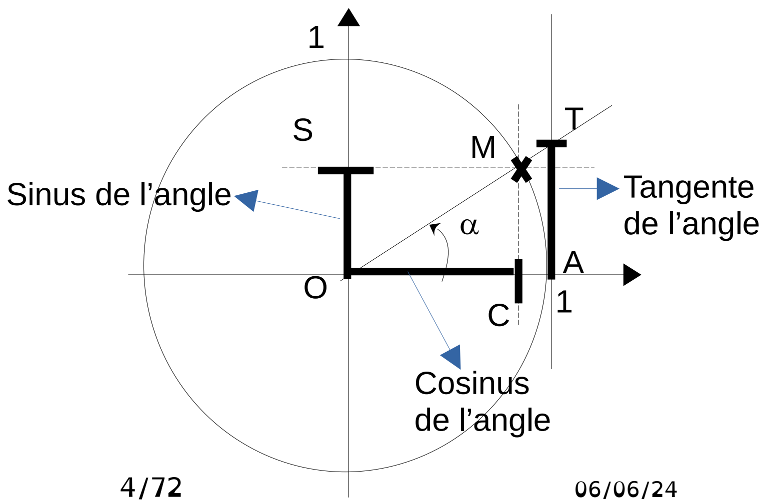
On considère le rectangle formé par les points OSMC, de diagonal OM. Il est composé de deux triangles rectangles OSM et OCM, dont l'hypoténuse est OM, de longueur 1, le rayon du cercle trigonométrique. On peut écrire les relations d'un triangle rectangle :

$OC = OM\cos(\alpha) = \cos(\alpha)$ et $OS = OM\sin(\alpha) = \sin(\alpha)$

Le théorème de Pythagore donne :

$OC^2 + OS^2 = OM^2 \Rightarrow \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

En faisant tourner M sur le cercle, pour un angle α entre 0 et 2π radian, les coordonnées de M sont $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



C) *La fonction tangente*

On considère la droite verticale passant par le point A situé sur l'axe des abscisses à la valeur 1. et le point T, intersection de cette droite et de la droite (OM)

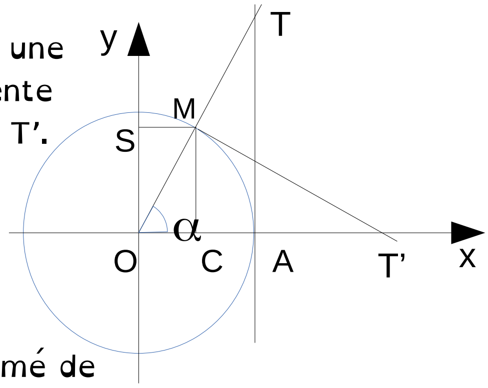
En écrivant les relations du triangle rectangle OAT :

$AT = OA \tan(\alpha) = \tan(\alpha)$

Par le théorème de Thalès, ou la proportionnalité des longueurs, on a :

$$\frac{AT}{OA} = \frac{CM}{OC} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

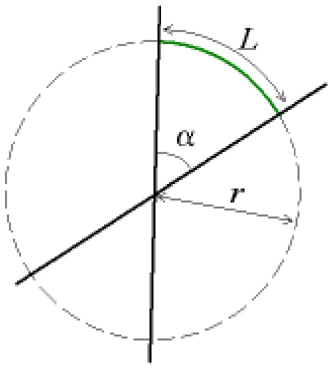
<u>Remarque</u> : pourquoi le nom « tangente »



Pour comprendre le lien avec la notion de tangente à une courbe, nous pouvons voir que si en M on trace la tangente au cercle, celle-ci coupe l'axe des abscisses en un point T'. Comme le triangle OMT' est rectangle en M, on a :

$MT' = \tan(\alpha) OM = \tan(\alpha)$.

D) *<u>Autre définition du radian</u>*



$$\alpha = \frac{L}{r}$$

Considérons un secteur angulaire, formé de deux droites concourantes distinctes, et un cercle de rayon *r* tracé dans un plan contenant ces deux droites, dont le centre est le point d'intersection des droites. Alors, la valeur de l'angle en radians est le rapport entre la longueur *L* de l'arc de cercle intercepté par les droites et le rayon *r*.

Le radian étant défini comme le rapport de deux longueurs, n'a pas de dimension physique, mais l'unité radian indique que la grandeur est un angle.

E) *<u>Pratique</u>*

Historiquement d'autres unités d'angles ont été utilisées, et d'autres le sont encore comme le degré où un tour correspond à 360°.

Concrètement, un radian vaut environ 57,3° (180°/π). Sur le cercle trigonométrique, la longueur de corde correspondant à un angle est la valeur absolue de l'angle. Sur un cercle de rayon r, la longueur de corde correspondant à un angle α est $r|\alpha|$.

Cette unité est très pratique en physique par exemple quand on travaille avec des poulies : une poulie de rayon R tourne d'un angle α : la chaîne qui est dessus bouge de $R\alpha$.

F) *<u>Exercices sur le cercle trigonométrique</u>*

1. L'échelle

Je pose une échelle de 8 m avec un angle de 80° avec le sol horizontal contre un mur vertical (perpendiculaire au sol).

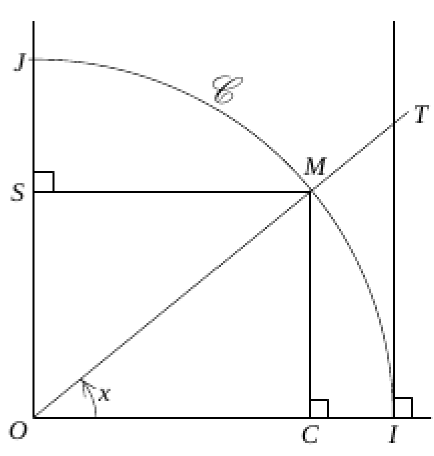
1) Quelle est la distance entre le pied de l'échelle et le mur ?

2) À quelle hauteur monte l'échelle ?

2. Une première démonstration

a Partie A : un calcul d'aire

Soit un réel $x \in]0 ; \pi/2[$ et M le point du cercle



trigonométrique C dans le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ tel que $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})=x$ (en radian).

C est le projeté orthogonal de M sur (OI) et S sur (OJ). T est sur l'intersection de la droite (OM) et de la droite parallèle à (OJ) passant par I.

1) Exprimez en fonction de x les distances OC, OS et IT.

2) Exprimez en fonction de x, les aires des triangles OIM et OIT

3) Exprimez en fonction de x, l'aire du secteur angulaire IOM (comparez au cercle complet)

4) Déduire des questions précédentes que pour tout $x\in]0\,;\pi/2[$ 0<sin(x)<x<tan(x)

b *Partie B : calculs de limites*

1) Après avoir inversé l'inégalité précédente, montrez que $x\in]0\,;\pi/2[$ on a :

$\cos(x)<\dfrac{\sin(x)}{x}<1$ Déduisez-en la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ quand x tend vers 0.

G) *Extension à tous les réels*

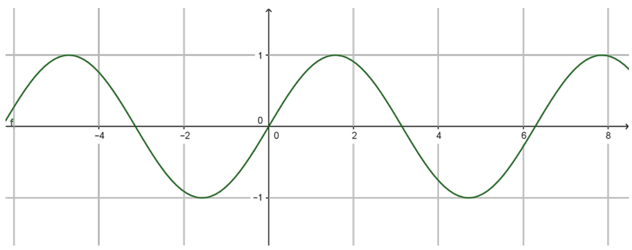
Par convention, on oriente l'angle α de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OM}$: $\alpha=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ avec le sens trigonométrique direct ↺ qui permet d'avoir l'angle positif entre 0 et $\pi/2$ radian dans le quart de cercle (un des 4 quadrants) où les coordonnées du point M sont toutes les deux positives.

Sur le graphique suivant on a représenté sur le cercle trigonométrique les angles usuels **à savoir retrouver sans calculette.** Les angles sont en radian, comme ils devraient toujours l'être, mais sur le dessin, ils sont aussi en degrés comme ils le sont parfois en électricité.

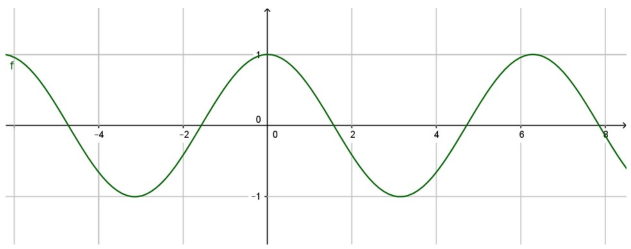
On peut ensuite faire tourner M sur tout le cercle et étendre alors les fonctions trigonométriques à tout angle réel afin de définir les fonctions sinus et cosinus sur tout $\mathbb{R}$ et la fonction tangente sur tous les réels où cos(x) ne s'annule pas : $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Voici une représentation graphique de ses fonctions :

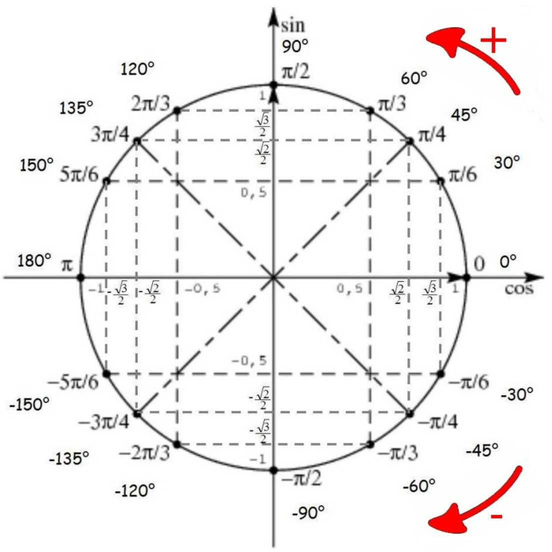
Tracé de la fonction sinus : y=sin(x)



Tracé de la fonction cosinus : y=cos(x)

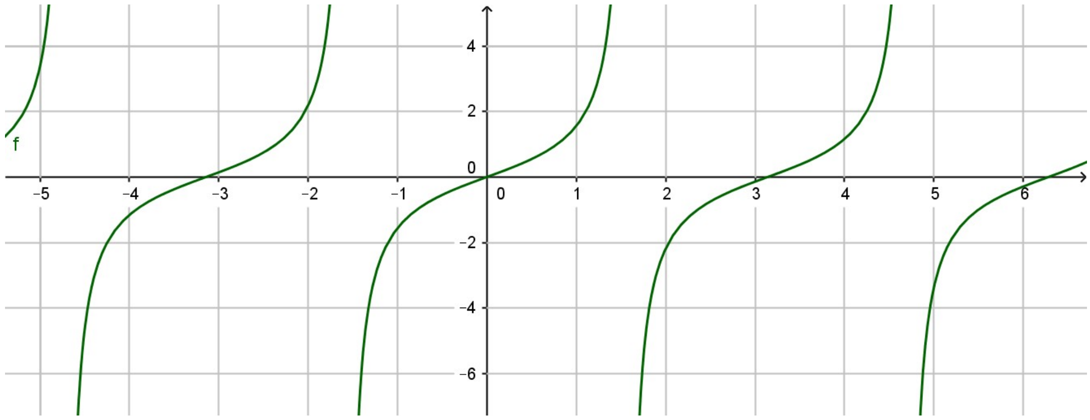


Remarque : sin(0)=0 et cos(0)=1



Angles à savoir retrouver sans calculette, par cœur.

Tracé de la fonction tangente : y=tan(x)



II) Les angles usuels (à savoir)

Exercice : remplir le tableau suivant sans calculette (à retenir).

x	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin																
cos																
tan																

III) Les propriétés des fonctions trigonométriques

A) *Formules trouvées à partir du cercle trigonométrique*

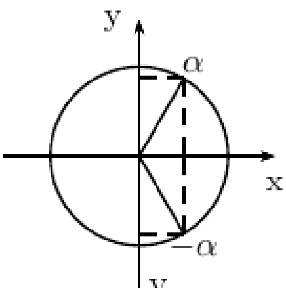
Vous avez dû remplir le précédent tableau grâce à certaines propriétés géométriques du cercle trigonométrique, sinon les symétries des résultats peuvent permettre de les trouver.

Il est important de savoir reporter sur les dessins sin, cos et tan. Les symétries observées permettent de retrouver facilement les formules qui suivent.

1. Arcs opposés

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

$$\begin{cases}\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)\\ \sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)\\ \tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)\end{cases}$$

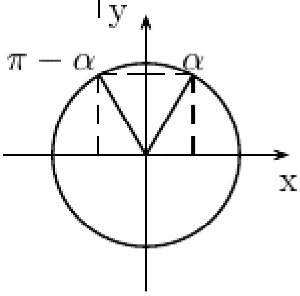


Ceci permet de dire que la fonction cosinus est paire et que les fonctions sinus et tangentes sont impaires.

2. Arcs supplémentaires (somme des angles = π),

symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

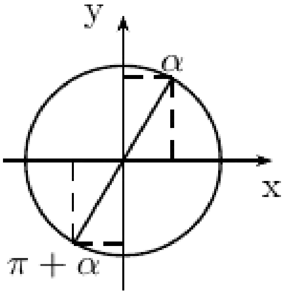
$$\begin{cases}\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)\\ \sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)\\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)\end{cases}$$



3. Arcs différents de π

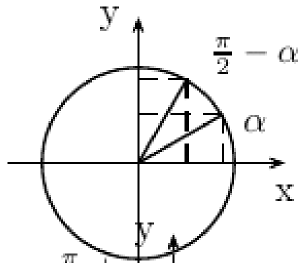
(différence des angles = π), symétrie centrale

$$\begin{cases}\cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)\\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha)\\ \tan(\pi+\alpha)=\tan(\alpha)\end{cases}$$



4. Arcs complémentaires, (somme des angles = $\pi/2$), symétrie par rapport à la première bissectrice (y=x)

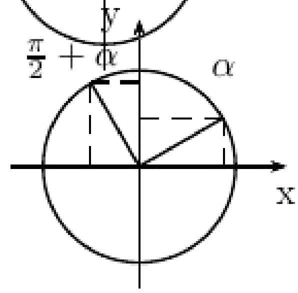
$$\begin{cases} \cos(\pi/2-\alpha)=\sin(\alpha) \\ \sin(\pi/2-\alpha)=\cos(\alpha) \\ \tan(\pi/2-\alpha)=\dfrac{1}{\tan(\alpha)}=cotan(\alpha) \end{cases}$$



5. Arcs différents de $\pi/2$

(différence des angles = $\pi/2$), rotation de $\pi/2$

$$\begin{cases} \cos(\pi/2+\alpha)=-\sin(\alpha) \\ \sin(\pi/2+\alpha)=\cos(\alpha) \\ \tan(\pi/2+\alpha)=-\dfrac{1}{\tan(\alpha)}=-cotan(\alpha) \end{cases}$$



B) <u>Formules trouvées à partir de la démonstration du début de ce cours</u>

Ces formules ne sont pas à connaître. Un formulaire est donné en DS si nécessaire.

sin(a+b)= cos(b).sin(a)+cos(a).sin(b) ; sin(a-b)= cos(b).sin(a)-cos(a).sin(b)

cos(a+b)=cos(a).cos(b)-sin(a).sin(b) ; cos(a-b)=cos(a).cos(b)+sin(a).sin(b)

sin(2a)=2sin(a).cos(a)=2tan(a)/(1+tan² a) ; cos(2a)=cos²a-sin²a=1-2sin²a

cos(2a)=2cos²a-1=(1-tan² a)/(1+tan² a)

tan(a+b)=(tan a + tan b)/(1-tan a . tan b) ; tan(2a)=2tan(a)/(1-tan² a)

cos(a)+cos(b)=2cos[(a+b)/2]cos[(a-b)/2] ; cos(a)-cos(b)=2sin[(a+b)/2]sin[(b-a)/2]

sin(a)+sin(b)=2sin[(a+b)/2]cos[(a-b)/2] sin(a)-sin(b)=2sin[(a-b)/2]cos[(a+b)/2]

Semaine 2 : Dérivée

I) Notion de dérivée

A) *Valeur dérivée : tangente à la courbe en un point*

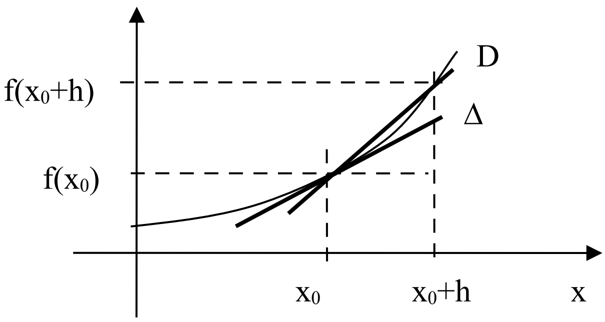


Figure 1: sécante (D) et tangente (Δ) en x_0

Soit une fonction f(x) et D la droite qui passe par les points de la courbe représentative de f qui ont pour abscisse x_0 et x_0+h (h>0 ou h<0).

La pente de la droite D est : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Plus h devient petit, plus la droite D se rapproche de Δ la droite tangente à la courbe représentative de f en x_0. La pente de la droite Δ est **le nombre dérivé** de la fonction f(x) en x_0.

B) *Fonction dérivée*

On appelle **fonction dérivée** de f(x) la fonction notée **f'(x)** qui pour chaque x donne le nombre dérivé. La fonction dérivée s'écrit : $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Si ce nombre existe, alors f est dérivable en x_0.

f'(x_0) est la dérivée de f en x_0, elle correspond à la pente de Δ la tangente à la courbe de f(x) en x_0.

On ne peut étudier cette limite que si f est continue en x_0. **f n'est dérivable en x_0 que si elle est continue en x_0.**

Notation de la dérivée appelée également différentielle : autour de x_0, la pente de la tangente qui est par définition $f'(x_0)$ est comme celle de toute droite $f'(x_0)=\frac{\Delta Y}{\Delta X}$.

Une variation (un accroissement) Δx autour de x_0, en X correspond à une variation (un accroissement) $\Delta f(x)$ en Y. Ce qui donne $f'(x_0)=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. En faisant tendre cet accroissement vers 0, $\Delta x \Rightarrow dx$ et $\Delta f(x) \Rightarrow df(x)$, on obtient :

$f'(x_0)=\frac{d(f(x))}{dx}$ en $x=x_0$, ou encore $f'(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)$.

Cette formule correspond à la notation différentielle de la dérivée.

Pour écrire la fonction dérivée on peut utiliser les **notations f'(x) ou** $\frac{df(x)}{dx}$. La seconde notation est plus lourde mais fait explicitement apparaître la variable (ici x) par rapport à laquelle est prise la dérivée (ce qui est indispensable dans le cas de fonction à plusieurs variables).

De même on dit indifféremment « f différentiable en x_0 » et « f dérivable en x_0 »

Unité : si f(x) est en Volt, et x en mètre, $df(x)$ est en Volt, dx est en mètre,

$f'(x)=\frac{d(f(x))}{dx}$ est en Volt/m,

Unité : si f(t) est en mètre, et t en seconde, $df(t)$ est en mètre, dt est en seconde, $f'(t)=\frac{d(f(t))}{dt}$ est en m/s,

C) Fonction dérivée et sens de variation (vu dans le QCM)

Si la valeur de la dérivée d'une fonction en x_0 est positive, c'est que la valeur de f(x) augmente quand x augmente autour de x_0.

Ainsi, si la dérivée d'une fonction est positive sur un intervalle, cette fonction est croissante sur ce même intervalle. Inversement, si elle est négative, elle est décroissante.

Lorsque le nombre dérivé est nul en un point, la courbe admet une tangente horizontale en ce point (pas de variation de f(x) pour une variation autour de x).

D) Dérivabilité, dérivée à gauche, dérivée à droite

Typiquement, une fonction est dérivable si elle ne présente pas « d'aspérité », de rupture de pente ni de partie « verticale ».

Une fonction qui n'est pas continue en un point n'y est pas dérivable : comme la fonction fait un saut, on ne peut pas définir de tangente, la pente de la sécante (la droite D de la figure 1) tend vers l'infini (la pente de la courbe est verticale).

Dans le cas de fonction non continue, ou à rupture de pente on définit :

- la dérivée à droite en x_0 de f : $f'(x_0^+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- la dérivée à gauche en x_0 de f. : $f'(x_0^-)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Alors, il y a une tangente à gauche et une tangente à droite différentes, la pente en x_0 n'est pas définie, la fonction n'est pas dérivable. Si la fonction est dérivable, la dérivée à droite et la dérivée à gauche sont égales.

Remarque : si ces deux limites sont égales, de valeur $f'(x_0)$, alors, il n'y a pas de rupture de pente. .

II) Dérivées des fonctions usuelles (vu dans le QCM)

À savoir PAR CŒUR celles qui ne sont pas grisées, **il n'y en a que cinq !**

Fonction	Dérivée	Fonction réciproque	Dérivée
x^α , $\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^{1/\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{\alpha}x^{(1/\alpha)-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$asin(x)=\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$acos(x)=\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$atan(x)=\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$cotan(x)=1/\tan(x)$	$-1-cotan^2(x)=-1/\sin^2(x)$		
$\ln(x)$	$1/x$	e^x	e^x
$\log_{10}(x)$	$\frac{1}{\ln(10)\cdot x}$	$10^x=e^{\ln(10)x}$	ln(10) 10^x
$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)=\frac{e^x+e^x}{2}$	$\text{argsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$ch(x)=\cosh(x)$	$sh(x)=\sinh(x)$	$\text{argch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$th(x)$	$1\text{-th}^2(x)=\frac{1}{\text{ch}^2(x)}$	$\text{argth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth(x)=1/th(x)$	$1-\coth^2(x)=-1/sh^2(x)$		

En utilisant les fonctions composées on obtient pour les dérivées qui sont **à savoir par cœur**

$(f^{\alpha})'=\alpha(f)'f^{\alpha-1}$ $\alpha\in\mathbb{R}$	$(\sin(f))'=f'\cos(f)$	$(\cos(f))'=-f'\sin(f)$	$(e^f)'=f'e^f$	$(\ln(f))'=\frac{f'}{f}$

III) Propriétés de la dérivée (à savoir)

A) *Linéarité (vu dans le QCM)*

Pour $a\in\mathbb{C}$ constant , $(a\,f(x))'=a\,f'(x)$ ou $\frac{d\;a\,f(x)}{dx}=a\frac{df(x)}{dx}$

et : $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ ou $\frac{d\,(f(x)+g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$

B) *Produit (vu dans le QCM)*

$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ou $\frac{d\,(f(x)g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{dg(x)}{dx}$

C) *Quotient (vu dans le QCM)*

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f(x)'g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ ou $\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx}=\frac{\frac{df(x)}{dx}g(x)-f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}$

La notation différentielle est franchement lourde !!

Pour l’inverse on obtient avec f(x)=1, fonction constante : $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

D) *Fonction composée (très important)*

$(u\circ v(x))'=v'(x)\cdot(u'\circ v(x))$ ou $\frac{d\,(u(v(x)))}{dx}=\frac{d\,(u(v))}{dv}\cdot\frac{d\,(v(x))}{dx}=\frac{d(u)}{dv}\cdot\frac{d(v)}{dx}$

ou $(u(v(x)))'=(u'(v(x)))\cdot v'(x)$ (La notation différentielle est plus simple)

Exemple : donner la dérivée de $f(x)=4\cos(3x+2)$

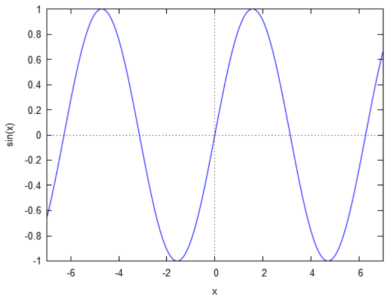
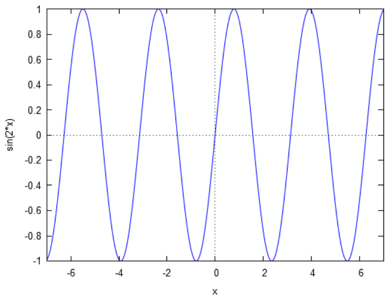
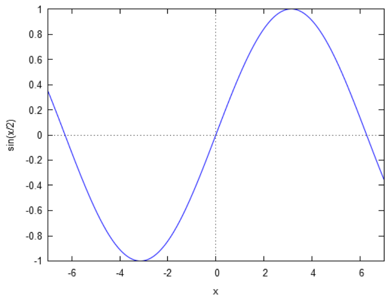
$g(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ avec $g(t)=u(v(t))=u\circ v(t)$, $v(t)=(\omega t+\varphi)$, $u(v)=\cos(v)$

$$(g(t))'=(u\circ v(t))'=v'(t)\cdot(u'\circ v(t))=\omega\cdot(-\sin(\omega t+\varphi))$$

$$\frac{d(g(t))}{dt}=\frac{d(\cos(v))}{dv}\cdot\frac{d(v(t))}{dt}=-\sin(v)\cdot\omega=-\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$(g(t))'=(u(v(t)))'=(u'(v(t)))\cdot v'(t)=-\sin(v)\cdot\omega=-\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

1. Exemples simples et visibles :

f(x)=sin(x) => f'(x)=cos(x)	g(x)=sin(2x) => g'(x)=2cos(2x)	h(x)=sin(x/2) => h'(x)=cos(x/2)/2
		

Nous pouvons bien vérifier que plus ω est important dans $\cos(\omega x)$ plus la pente est importante. La pente de g est deux fois plus importante que celle de f et celle de h est deux fois moins importante que celle de f.

IV) Exercices

C) *Exercices simples d'application (vu dans le QCM)*

Dérivez des fonctions suivantes :

$f(x)=5x^4+3x^2-6x+1$; $f(x)=\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{2x}$; $f(x)=\frac{3x+2}{x^2-3}$

$f(x)=\sin(4(x-9))$; $f(x)=(1+x^2)^5$; $f(t)=\exp(-t/\tau)\cdot\sin(\omega t+\varphi)$;

Semaine 3 : Équations différentielles

I) Présentation des équations différentielles

A) *Définitions*

Une équation différentielle est une équation du type : $F(x, y, y', y'',\ldots ,y^{(n)})=0$ où l'**inconnue y** est une fonction $y(x)$ de la variable x, n fois différentiable.
Une équation différentielle est une relation F entre une fonction $y(x)$, ses dérivées $y^{(n)}(x)$ et une autre fonction appelée second membre.
On appelle **intégrale ou solution** de l'équation sur un intervalle I, toute fonction $f(x)$, n fois dérivable vérifiant : $F(x, f(x), f'(x), f''(x),\ldots , f^{(n)}(x))=0$.
Résoudre une équation différentielle se dit intégrer car pour faire apparaître la fonction $f(x)$ on doit faire disparaître les fonctions dérivées ; ce qui revient d'une façon où d'une autre à intégrer.
L'ordre d'une équation différentielle est le maximum des ordres des dérivées figurant dans l'équation.
Une équation différentielle est dite **linéaire avec second membre** si elle est de la forme
$a_n(x)y^{(n)}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=\mathbf{g(x)}$ où $a_n(x), \ldots,a_1(x), a_0(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions de x, dans notre cours, ces fonctions ne seront que des constantes.
L'**équation homogène** , ou équation **sans second membre**, associée à $a_n(x)y^{(n)}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x)$ est

$$a_n(x)y^{(n)}+a_1(x)y'+a_0(x)y=0.$$

Une équation différentielle est linéaire à **coefficients constants** si elle est de la forme $a_ny^{(n)}+\ldots+a_1y'+a_0y=g(x)$ où $a_n, \ldots,a_1, a_0$ sont des réels et $g(x)$ est une fonction de x dite **second membre** de l'équation. Elle est dite à coefficients constants **sans second membre** si g est la fonction nulle :
$a_ny^{(n)}+\ldots+a_1y'+a_0y=0$.

Application directe : donner la dénomination la plus précise des trois équations différentielles ci-dessous.

(a) $xy'+y-y^2\ln(x)=0$ (b) $L\frac{di}{dt}+Ri=E$ (c) $J\ddot{\theta}+C\theta=0$

Vérifier que :

$y(x)=\frac{1}{1+\ln(x)}$ est solution de l'équation (a)

$i(t)=\exp(\frac{-R}{L}t)+\frac{E}{R}$ est solution de l'équation (b)

$\theta(t)=\cos(\sqrt{\frac{C}{J}}t)$ est solution de l'équation (c)

B) *Où trouve-t-on des équations différentielles*

La réponse est : partout ! Les problèmes physiques de mécanique, d'électricité ou d'électronique consistent la plupart du temps à écrire des équations issues de la théorie qui conduisent à une (ou plusieurs) équation(s) différentielle(s), que l'on doit ensuite résoudre. Écrire une équation physique, c'est généralement faire un bilan (somme des forces, somme des tensions, somme des courants, conservation des masses...), ce qui se traduit par une équation différentielle.
Considérons un circuit électrique associant une résistance R et une inductance L en

série. On branche un générateur de tension constante E aux bornes de cette association et on s'intéresse au courant $i(t)$ présent dans le circuit. La théorie des circuits, la loi des mailles, permet d'établir que : $Ri(t)+Li'(t)=E$. C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec un second membre de la forme constante E.

C) <u>Propriété</u>

La solution d'une équation différentielle homogène d'ordre **n**, dépend de **n constantes arbitraires.** Ainsi, comme on va le voir plus loin, les solutions de l'équation y'(x)+y(x)=0 sont y(x)=K exp(-x) où K est une constante réelle. La même équation pourvue de la condition initiale y(0)=2 n'a plus qu'une solution unique : y(x)=2 exp(-x).

D) <u>Solutions générales de l'équation</u>

On montre que l'**ensemble des solutions** d'une équation avec second membre, est la somme des solutions de son équation homogène associée $y_H(x)$ (ou $y_0(x)$) et d'une solution particulière (une solution qui vérifie l'équation différentielle complète) $y_P(x)$ (ou $y_1(x)$) : $y(x)=y_H(x)+y_P(x)=y_0(x)+y_1(x)$.

Physiquement, sur l'exemple du circuit électrique ci-dessus, la solution homogène correspond au régime transitoire de la solution : $i_0(t)=K\exp(\frac{-R}{L}t)$ et la solution particulière correspond au forçage imposé par le second membre, ici le générateur E : $i_1(t)=\frac{E}{R}$.

Quand le temps t tend vers l'infini, la solution homogène $i_0(t)$ tend vers 0, c'est le transitoire. La solution particulière est une constante, elle est de la même forme que le second membre qui est constant E.

On vérifie :

$$Ri_0(t)+Li_0'(t)=RK\exp(\frac{-R}{L}t)+LK\left(\frac{-R}{L}\right)\exp(\frac{-R}{L}t)=RK\exp(\frac{-R}{L}t)-RK\exp(\frac{-R}{L}t)=0$$

$$Ri_1(t)+Li_1'(t)=R\frac{E}{R}+0=E$$

<u>Conditions initiales :</u> On trouve une infinité de y(x) à cause des **n constantes arbitraires** de la solution de l'équation homogène. Pour sélectionner la solution qui nous intéresse, on regarde les conditions initiales : valeurs de y(x), y'(x), .. pour x=0 . C'est ce qu'on appelle les conditions initiales.

Ainsi les propriétés connues du phénomène physique comme vitesse nulle au démarrage, position de départ, charge du condensateur, fixent les constantes arbitraires et déterminent la solution unique de l'équation différentielle avec ces conditions initiales.

Sur l'exemple du circuit électrique $i(t)=i_0(t)+i_1(t)=K\exp(\frac{-R}{L}t)+\frac{E}{R}$ la valeur initiale du courant vaut $i(0)=K+\frac{E}{R}$. La valeur de la constante K est donc fixée par le courant initial, si $i(0)=0$, cela donne $K=\frac{-E}{R}$ et $i(t)=\frac{-E}{R}\exp(\frac{-R}{L}t)+\frac{E}{R}=\frac{E}{R}\left(1-\exp(\frac{-R}{L}t)\right)$ est la solution unique avec $i(0)=0$.

II) Équations du premier ordre à coefficients constants : y'+ay=g(x)

Si a=0, il suffit d'intégrer g(x) pour trouver y.

B) *Solution de l'équation homogène : y'+ay=0*

Les solutions sont de la forme $y_h(x)=K e^{-ax}$.

Remarque : on peut vérifier la solution : $y_0'(x)=y_h'(x)=-aK\cdot e^{-ax}$

On remplace : $y_0(x)'+a\,y_0(x)=-a\,K\cdot e^{-ax}+a\,K\cdot e^{-ax}=0$

On détermine K avec une condition initiale : $y_h(0)=K\cdot e^{-a\cdot 0}=K$;

K est la valeur initiale de $y_h(x)=K\cdot e^{-ax}$

C) *Résumé à savoir*

Équation $by'(x)+c\,y(x)=0$ (avec b≠0) donne $y'(x)+(c/b)\,y(x)=0 \Rightarrow y_h(x)=K e^{-cx/b}$

La constante K est déterminée en utilisant les conditions initiales.

Exemples à résoudre :

1) y'(x)+2y(x)=0 ; 2) y'(x)-3y(x)=0 ; 3) 4y'(x)+5y(x)=0

D) *Solution particulière de l'équation avec second membre : y'+ay=g (x)*

Dans nos 3 cas simples, on cherche toujours une solution particulière **de la même forme que g(x), le second membre.** Plusieurs types d'études s'imposent en fonction du type de g(x), nous allons en étudier trois.

1. g(x) fonction exponentielle : g(x)=De^{cx}

On cherche une solution particulière de la même forme : $y_p(x)=Be^{cx}$. Pour déterminer B, on dérive $y_p(x)$ et on remplace dans l'équation : Ceci donne :

$c\,Be^{cx}+aBe^{cx}=De^{cx}$ donc, en simplifiant des 2 côtés par e^{cx} : (c+a)B=D et $B=\dfrac{D}{a+c}$.

Remarque : il faut obligatoirement avoir c≠-a pour avoir une solution de cette forme. Dans le cas où c=-a, où la solution de l'équation homogène est de la même forme que le second membre, on prend une solution particulière de la forme $y_p(x)=B\,x\,e^{cx}$ (voir exercice 4).

2. Fonction circulaire : g(x)=C cos(ωx+ϕ)

On cherche une solution particulière de la forme : y_p(x)=C.cos(ωx+ϕ)+S.sin(ωx+ϕ).
Pour déterminer C et S, on dérive et en remplace dans l'équation :

Remarques : - même s'il n'y a qu'un cos ou qu'un sin, on prend C cos +S sin !

- ceci pour chaque couple (ω,ϕ) (ω et/ou ϕ différents)

3. Fonction polynôme de degrés n : $\sum_{i=0}^{i=n} b_i x^i = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

Pour trouver le type de la solution particulière, nous supposons $y_p=a_n x^n+\ldots a_1 x+a_0$, la solution est un polynôme de même degré que le second membre. Pour déterminer a_n, … , a_0 , on dérive et en remplace dans l'équation :Calculons $y_p'+ay_p$:

$$y'_p+ay_p=\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}+a\sum_{i=0}^{n} a_i x^i=\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_{i+1}x^i+a\sum_{i=0}^{n} a_i x^i=aa_n x^n+\sum_{i=0}^{n-1}\left(aa_i+(i+1)a_{i+1}\right)x^i=g(x) .$$

Si g est un polynôme, il existe une solution particulière y qui est un polynôme de même degré ($a\neq 0$, sinon $a=0$, c'est tout simplement une intégration). On peut identifier les coefficients 1 à 1 en partant du plus haut degré avec l'équation précédente.

Application directe : résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'(x)-3y(x)=\sin(x)$; **2)** $y'(x)+2y(x)=12e^{3x}$; 3) $2\,y'(x)-y(x)=x+1$

E) *Propriétés*

- Si y_1 est solution particulière d'une équation différentielle linéaire avec second membre f, et si y_2 est solution particulière de **la même équation** différentielle linéaire avec second membre g, alors la combinaison linéaire : $\alpha y_1+\beta y_2$ des deux solutions particulières est solution particulière de l'équation différentielle dont le second membre est $\alpha f+\beta g$.

Application directe : résoudre l'équation différentielle suivante :

4) $3y'(x)+2y(x)=\sin(x)+x^2$;

III) Exercices pour la semaine suivante

A) *Résoudre :*

1) $y'(t)-6y(t)=\cos(3t)$; 2) $3y'(x)+y(x)=x^2-6x+2$; 3) $y'(t)+3y(t)=4e^{-2t}$

4) $y'(t)+3y(t)=4e^{-3t}$ (celle-là n'est pas facile, regarder le cours).

B) *Conditions initiales*

Donnez pour les trois cas précédents la solution qui vérifie $y(0)=1$

IV) Exemple de résolution d'équations différentielles

A) *Résoudre $y'(x)+3y(x)=\sin(2x)$ avec comme condition initiale $y(0)=0$*

1. Recherche de la solution de l'équation homogène associée sans second membre

Équation homogène : $y'(x)+3y(x)=0$:

D'après le cours on sait qu'elle est de la forme : $y_0(x)=K\,e^{-3x}$ où K est une constante réelle quelconque qu'on peut déterminer à la fin de la résolution grâce aux conditions initiales (CI).

2. Recherche d'une solution particulière (SP)

Le second membre étant en sin/cos, la solution sera en sin/cos de la même pulsation :

$$y_1(x)=C\cos(2x)+S\sin(2x)$$

Afin de déterminer les constantes C et S on écrit que $y_1(x)$ vérifie l'équation différentielle $y'_1(x)+3y_1(x)=\sin(2x)$:

$$\begin{cases} y_1(x) \;=C\cos(2x)+S\sin(2x) \\ y'_1(x)=-2C\sin(2x)+2S\cos(2x) \end{cases}\left|\begin{array}{l} x3 \\ x1 \end{array}\right.$$

ce qui donne $y'_1(x)+3y_1(x)=(3C+2S)\cos(2x)+(3S-2C)\sin(2x)=\sin(2x)$:

en identifiant les termes en cos(2x) et en sin(2x) on a :

$$\begin{array}{l} \cos(2x): \\ \sin(2x): \end{array}\begin{cases} 2S+3C=0 \\ -2C+3S=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} S=-3C/2 \\ -2C+3(-3C/2)=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} S=-3C/2 \\ -13C/2=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} S=-3C/2=3/13 \\ C=-2/13 \end{cases}$$

On a donc notre solution particulière de la forme : $\boxed{y_1(x)=\dfrac{3\sin(x)-2\cos(2x)}{13}}$

3. Recherche de la forme générale de l'ensemble des solutions (SG)

La forme de la solution générale est $\boxed{y(x)=y_0(x)+y_1(x)=Ke^{-3x}+\frac{3\sin(x)-2\cos(2x)}{13}}$

4. Recherche de la solution qui correspond aux conditions initiales (CI)

Maintenant que nous avons la forme de l'ensemble des solutions qui vérifient l'équation différentielle, nous pouvons repérer celle(s) qui convien(nen)t avec les conditions initiales :

$y(0)=K-\frac{2}{13}=0$ donc $K=\frac{2}{13}$ ceci donne : $\boxed{y(x)=\frac{2e^{-3x}+3\sin(x)-2\cos(2x)}{13}}$

Remarque : comme c'est une équation du premier ordre linéaire, il faut une seule CI pour identifier la seule solution qui convient.

B) *Résoudre y'(x)-2y(x)=10e^{3x} avec y(0)=2*

1. y'(x)-2y(x)=0 (ou solution homogène)

$y_0(x)=K\ e^{2x}$ où K est une constante réelle quelconque qu'on peut déterminer à la fin de la résolution grâce aux conditions initiales (CI).

2. SP (ou Solution particulière)

Le second membre est un exponentiel, donc notre solution particulière sera un exponentiel de même constante de temps.

Remarque : si la constante de temps du second membre est la même que celle trouvée à la solution de l'équation homogène associée, ceci ne marche pas. Il faudrait multiplier par x la solution ainsi trouvée. Mais, on ne vous demande pas de le savoir.

$$\left\{\begin{array}{ll|l} y_1(x) & =Ce^{3x} & \times(-2) \\ y'_1(x) & =3Ce^{3x} & \times 1 \end{array}\right.$$

Ceci donne $y'_1(x)-2y_1(x)=3Ce^{3x}-2Ce^{3x}=Ce^{3x}=10e^{3x}$ donc C=10. D'où $y_1(x)=10e^{3x}$.

3. SG (ou Solution générale)

La forme de la solution générale est $\boxed{y(x)=y_0(x)+y_1(x)=Ke^{2x}+10e^{3x}}$.

4. CI (ou condition Initiale)

y(0)=K+10=2 donc K=-8. La solution qu'on cherchait est donc : $\boxed{y(x)=10e^{3x}-8e^{2x}}$

C) *Résoudre 2y'(x)-3y(x)=12x²*

1. 2y'(x)-3y(x)=0

y'(x)-(3/2)y(x)=0 : Ceci donne comme solution $y_0(x)=K\ e^{(3/2)x}$ où K est une constante réelle quelconque.

2. SP

Le second membre est un polynôme du second degré, la solution sera un polynôme du second degré :

$$\left\{\begin{array}{ll|l} y_1(x) & =ax^2+bx+c & \times(-3) \\ y'_1(x) & =2ax+b & \times 2 \end{array}\right.$$

Nous repérons combien on aurait de x², x et constante dans l'expression $2y'_1(x)-3y_1(x)$ et comparons au nombre souhaité :

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x: \\ constante: \end{array}\begin{cases} -3a & =12 \\ -3b+4a & =0 \\ -3c+2b & =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & =-12/3 & =-4 \\ b & =4a/3 & =-16/3 \\ c & =2b/3 & =-32/9 \end{cases}$$

Ceci donne $y_1(x)=-4x^2-16/\ 3x-32/9$

3. SG

La forme de la solution générale est $\boxed{y(x)=y_0(x)+y_1(x)=Ke^{(3/2)x}-4x^2-16/3x-32/9}$

Ici, il n'y a pas de CI. Donc, ce point n'est pas à faire : la réponse finale est celle de la précédente question.

Semaine 4 : Résolution mathématique d'équations différentielles

I) Résumé à savoir

Soit $y(x)$ une fonction et $(a,b)\in\mathbb{R}^{*2}$ (un couple de réels non nuls) : $ay'(x)+by(x)=g(x)$

1 Solution de l'équation homogène :

méthode : $y'(x)+(b/a)\cdot y(x)=g(x)/a$ => $y_0(x)=Ke^{-\frac{b}{a}x}$, $K\in\mathbb{R}$ (y_0 ou y_h comme on souhaite)

2 Solution Particulière $y_P(x)$ (ou y_1) qui ressemble à $g(x)$:

- $Si\, g(x)=De^{cx}$, $y_P(x)=Ae^{cx}$avec $A\in\mathbb{R}$
- $Si\, g(x)=De^{rx}=De^{-\frac{b}{a}x}$, $y_P(x)=Axe^{rx}$avec $A\in\mathbb{R}$ (pas à connaître par cœur)
- $Si\, g(x)=D\cos(\omega x+\phi)$ => $y_P(x)=C\cos(\omega x+\phi)+S\sin(\omega x+\phi)$avec $(C,S)\in\mathbb{R}^2$
- Si $g(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$ => $y_P(x)=b_n x^n+\ldots+b_1 x+b_0$ avec $(b_n,\ldots,b_1,b_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$

Je remplace $y_P(x)$ dans l'éq. diff. pour déterminer la valeur des coefficients $A,C,S,b_n,\ldots,b_1 et\, b_0$

Solution générale $y_{SG}(x)=y_h(x)+y_P(x)$ ou $y(x)=y_0(x)+y_1(x)$

3 Conditions initiales $y_{SG}(0)$ => solution unique en déterminant K

II) Résoudre les équations différentielles sans second membre :

Eq1) y'(x)+2y(x)=0 Eq2) y'(x)-3y(x)=0 Eq3) 2y'(x)+5y(x)=0

III) Résoudre les équations différentielles avec second membre :

Eq1a) $y'(x)+2y(x)=10e^{3x}$ Eq2a) y'(x)-3y(x)=sin(4x) Eq3a) 2y'(x)+5y(x)=10x+9

IV) Appliquer les conditions initiales suivantes :

Pour Eq1 : y(0)=0Pour Eq1a : y(0)=0 Pour Eq2a : y(0)=1 Pour Eq3a : y(0)=2

V) Résoudre l'équation différentielle (Cours de physique de S1, thermique S6) :

Eq4) $\Phi=C_{th}\frac{d\Theta}{dt}+\frac{\Theta}{R_{th}}$ soit $R_{th}C_{th}\Theta'(t)+\Theta(t)=R_{th}\Phi$ et on considère qu'en t=0, $\Theta=0$

VI) Résoudre les équations différentielles suivantes :

Eq5) $y'(t)-3y(t)=\cos(3t)+2$ Eq6) $2y'(t)+y(t)=t^2+e^{-2t}$

Semaine 5 : Équations différentielles et électronique

I) Circuit RL et équation différentielle

Posez l'équation différentielle correspondante au circuit RL série.

Le but est de trouver **i(t)**, puis la tension **$V_R(t)$** aux bornes de la résistance de résistance R puis **$V_L(t)$** aux bornes de la bobine d'inductance L connaissant la tension **V(t)** imposée aux bornes du circuit LR. On prend comme inconnue dans l'équation différentielle, **i(t)** : le courant dans le circuit.

Faire un schéma du montage, rappeler la relation courant tension pour une résistance et pour une bobine, appliquer la loi des mailles.

II) Résolution

A) *Résoudre condition initiale $i(0)=I_0$, et $V(t)=0$ comme second membre*

B) *Résoudre condition initiale $i(0)=I_0$, et $V(t)=E$ (valeur constante) comme second membre*

C) *Résoudre avec $V(t)=Ve.\cos(\omega t)$, chercher la solution particulière puis la solution générale avec condition initiale $i(0)=0$*

IV) Finir les exercices de la semaine précédente.

Semaine 6 : Les nombres complexes

I) Définition

Pour une présentation des nombres complexes, on pourra se reporter à la vidéo suivante : https://www.youtube.com/watch?v=S7aXHqk7sbk

A) *Un nombre dont le carré fait -1*

Tout réel au carré donne un nombre positif. Pour trouver un nombre dont le carré fasse -1, on doit sortir du corps des réels, car le carré d'un réel est toujours un nombre positif. En mathématiques, ce nombre dont le carré fait -1 est noté *i*. Mais, ici, en GEii où on fait beaucoup d'électricité, *i* est souvent utilisé pour représenter un courant. Pour éviter cette confusion, nous utiliserons aussi la notation *j*.

$$j^2=-1 \quad .$$

B) *Construction*

Nous allons construire avec ce nombre *j* et l'ensemble des réels ($\mathbb{R}$) un nouvel ensemble qu'on appelle le corps des Complexes : $\mathbb{C}$.

Voici son mode de construction : $z=a+jb$ un complexe, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

a s'appelle la partie réelle de z : $a=\Re(z)$

b (ou jb) s'appelle la partie imaginaire de z : $b=\Im(x)$

Nous allons étendre sur cet ensemble les lois + (addition) et x (multiplication) habituelles. Pour ceci, nous prenons 2 complexes $z=a+jb$ et $z'=a'+jb'$ avec $(a,b,a',b')\in\mathbb{R}^4$:

$z+z'=a+jb+a'+jb'=(a+a')+j(b+b')$

$z\,x\,z'=z.z'=zz'=a(a'+jb')+jb(a'+jb')=aa'+jab'+ja'b+j^2bb'=(aa'-bb')+j(ab'+a'b)$

Ces lois ont été faites pour prolonger sur $\mathbb{C}$ nos lois primordiales de $\mathbb{R}$ avec les mêmes propriétés comme la commutativité, l'associativité, la factorisation. Nous pouvons bien vérifier que si on prend des réels (b=b'=0) les lois réelles restent les mêmes, si $z=1(a=1\,et\,b=0)z.z'=z'$, si $z=0(a=b=0)z+z'=z'\,et\,z.z'=0$ et qu'on a toujours $j^2=-1(a=a'=0\,et\,b=b'=1)$.

Quand on travaille avec les complexes écrits sous cette forme, on peut considérer j comme une variable quelconque quand on additionne ou multiplie. La seule différence, c'est que $j^2=-1$.

Nous pouvons définir dans $\mathbb{C}$ comme nous l'avions fait dans $\mathbb{R}$ la division, les puissances entières (les puissances non entières n'étant disponibles que pour les réels positifs).

L'ensemble des réels est un sous-ensemble de l'ensemble des complexes, celui des nombres dont la partie imaginaire est nulle.

On appelle imaginaire pur un nombre dont la partie réelle est nulle : un nombre de la forme jx où x est un réel.

1. Exemples

$(1+2j)+(3-j)=1+2j+3-j=4+j$

$(1+2j)-(3-j)=1+2j-3+j=-2+3j$

$(1+2j).(3-j)=3(1+2j)-j(1+2j)=3+6j-j-2j^2=3+5j-2(-1)=3+5j+2=5+5j$

2. Exercices

$(3-4j)+(4+5j)=$

$(3-4j).(4+5j)=$

$j.j.j=j^3=$

$j.j.j.j=j^4=$

$2j.2j=$

Donnez un nombre dont le carré fait -9 : dont le carré fait -2 :

C) *Forme algébrique, partie imaginaire et partie réelle, conjugué*

La notation z=a+jb avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ d'un nombre complexe est appelée forme algébrique d'un nombre complexe. Cette forme se décompose en deux parties : la partie réelle a et la partie imaginaire b. On note : $a=\Re(z)=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\Im(z)=\mathrm{Im}(z)$

1. Conjugué d'un complexe

Le conjugué d'un complexe $z=a+jb$ est le complexe $\overline{z}=\overline{a+jb}=a-jb$ qui a la même partie réelle et la partie imaginaire opposée.

Calculez : $z+\overline{z}=$

$z-\overline{z}=$

$z\cdot\overline{z}=$

En déduire en fonction de z et $\overline{z}$:

$\Re(z)=$

$\Im(z)=$

Propriétés :

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, le conjugué d'une somme égale la somme des conjugués

$\overline{z_{¿}}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$, le conjugué d'un produit égale le produit des conjugués.

Utilisation pour la division des complexes : pour faire une division avec des complexes et trouver facilement la partie réelle et la partie imaginaire du résultat, il faut transformer la fraction pour avoir un **dénominateur réel.** Pour cela, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le **conjugué du dénominateur**.

$\frac{1+2j}{3-j}=\frac{(1+2j)(3+j)}{(3-j)(3+j)}$; $(3+j)$ est le conjugué de $(3-j)$: $\overline{(3-j)}=(3+j)$

2. Exemples :

$\frac{1+2j}{3-j}=\frac{(1+2j)(3+j)}{(3-j)(3+j)}$ On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur

$\frac{1+2j}{3-j}=\frac{(3+j)+(6j-2)}{9+1}$ On développe le numérateur et de dénominateur en passant bien à $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$

$\frac{1+2j}{3-j}=\frac{1+7j}{10}=\frac{1}{10}+\frac{7}{10}j$ On simplifie et on affiche bien la partie réelle et la partie imaginaire.

3. calculez les expressions

$(9-2j)/(2+6j)=$

$(9-2j)+(2+6j)=$

$(9-2j)x(2+6j)=$

$(\overline{9-2j})/(\overline{2+6j})=$

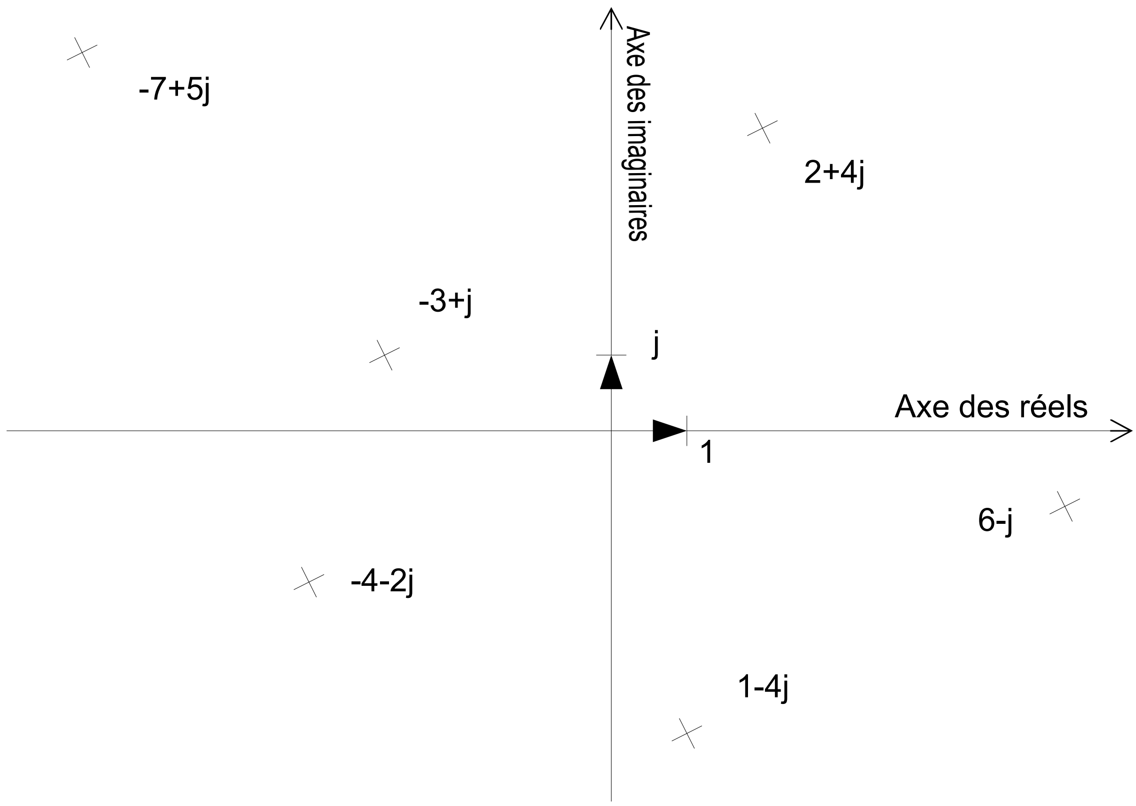
$\overline{(9-2j)}+\overline{(2+6j)}=$

$\overline{(9-2j)}x\overline{(2+6j)}=$

II) Le plan complexe

Soit P un plan muni de deux axes orthogonaux, un axe « réel » et un axe « imaginaire ». La graduation unitaire est 1 sur l'axe réel et j sur l'axe imaginaire (même distance par rapport au centre pour 1 et j). Nous pouvons représenter tout complexe z=a+jb, par un point M du plan de coordonnées a sur l'axe réel et b sur l'axe imaginaire. Ainsi chaque point du plan complexe (a,b) est la représentation graphique d'un nombre complexe unique a+jb.

On dit que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ perpendiculaires (ortho) de longueur 1 (normé) et pour aller de $\vec{v}$ à $\vec{u}$, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ($(O,\vec{u},\vec{v})$ direct). $\vec{u}$ oriente l'axe des réels et $\vec{v}$ l'axe des imaginaires.



Par définition, on dit que M ou $\overrightarrow{OM}$ est l'image de z et on dit aussi la réciproque qui est équivalente : z est l'affixe de M ou de $\overrightarrow{OM}$.

Le plan complexe désigne un plan, muni d'un repère orthonormé, dont **chaque point** est la représentation graphique d'un **nombre complexe unique.**

La représentation dans le plan complexe permet souvent de comprendre des opérations sur les complexes.

<u>Remarque :</u> pour tout complexe z=a+jb, la distance de son image à l'origine du repère, appelée module de z est $\sqrt{a^2+b^2}=|z|$. Ceci donne $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2$.

III) Exercices avec la forme algébrique

Placez les points suivants sur le plan complexe : $M_1(2+j)$, $M_2(1-3j)$, $M_3(1+2j)$, $M_4(-1+j)$ et $M_5(5-5j)$

Placez-les sur le plan complexe et donnez la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué du résultat des opérations suivantes :

- $A=(2+j)(1-3j)=$
- $B=1/(-1+j)$
- $C=(5-5j)/(1+2j)=$
- $D=(2+j)+(1-3j)=$
- $E=(2+j)-(1-3j)=$

  Nous pouvons voir que l'addition de deux complexes revient à additionner les vecteurs images. Regardez d'un point de vue graphique ce que donne la multiplication (angle et argument).

- Application : faire le dessin pour trouver l'addition de $z=2-3j$ et $z'=-3+2j$.

IV) <u>Exercices</u>

Placez dans le plan complexe 2 points A d'affixe -1-2j et B (ni sur l'axe réel, ni sur l'axe imaginaire, module entre 0,5 et 3) dont l'affixe est simple (partie imaginaire ou partie réelle entière).

Écrivez bien les calculs sur la feuille que vous faites.

Placez dans le plan les points A_1 et B_1 dont les affixes sont les opposées des premières.

Placez dans le plan les points A_2 et B_2 dont les affixes sont les conjuguées des premières.

Placez dans le plan les points A_3 et B_3 dont les affixes sont les inverses des premières.

Placez dans le plan les points A_4 et B_4 dont les affixes sont les conjuguées des inverses des premières. On remarque un alignement. Lequel ?

Semaine 7 : Les équations du premier et second degré avec les complexes

I) Équation du premier degré

La résolution des équations du premier degré dans $\mathbb{C}$ se fait comme dans $\mathbb{R}$. Rien ne change si ce n'est qu'on a des nombres complexes. Pour le vérifier, nous allons résoudre ces différentes équations :

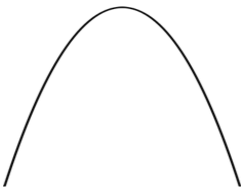
$3z-4=5j$; $(1+j)z+2=3-j$; $e^{j\pi/3}z+1=e^{j\pi/4}$

Chaque fois, il faudra écrire la solution sous sa forme algébrique.

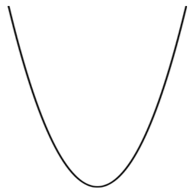
Remarque : l'inconnue complexe est plus souvent notée z, pas x.

II) Idée générale sur les polynômes du second degré

Si on met horizontalement l'axe des x et verticalement l'axe des y, en traçant la courbe représentative de $y=f(x)=ax^2+bx+c$, nous auront obligatoirement une parabole orientée vers le haut où vers le bas en fonction du signe de a :

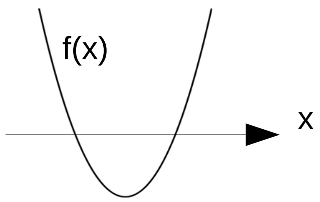


si a<0 ou

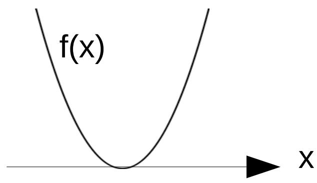


si a>0.

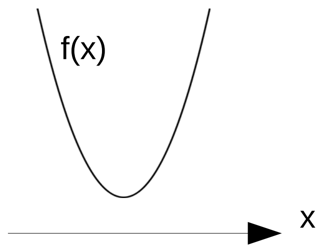
Suivant où se trouve l'axe des abscisses, nous voyons que nous avons trois possibilités pour la résolution de l'équation $f(x)=ax^2+bx+c=0$:



l'axe des abscisses coupe la courbe : il y a deux solutions.



l'axe des abscisses est tangent à l'extremum (l'extremum est 0) : il y a une solution unique.



l'axe des abscisses ne coupe pas la courbe : il n'y a pas de solution réelle.

III) Résolution de l'équation ax²+bx+c=0

En posant $\Delta=b^2-4ac$, nous avons les 3 trois cas entraperçus précédemment :

1. **Δ>0 : deux racines réelles** $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ **:** $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ **ou** $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
2. **Δ=0 : une racine réelle double :** $x=\frac{-b}{2a}$
3. **Δ<0 : pas de racine réelle**

B) *Conclusion*

Soit l'équation : $f(x)=ax^2+bx+c=0$,

La fonction f(x) présente un extremum pour $f'(x)=2ax+b=0$ soit $x_m=\frac{-b}{2a}$

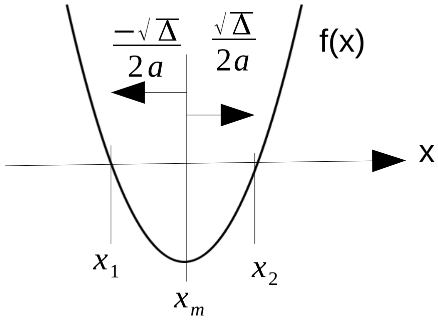
On définit le discriminant : $\Delta=b^2-4ac$, on peut en déduire la forme de la solution en fonction du signe de Δ .

- $\Delta\geq 0$: $S=\left\{x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$, deux racines réelles centrées autour de l'extremum x_m . Dans le cas particulier $\Delta=0$, les deux racines se ramènent à une seule sur l'extremum $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ appelé racine double. En se référant au dessin, c'est la jonction des deux précédentes racines si on fait glisser l'axe des abscisses afin qu'il passe par l'extremum.

Cela peut se représenter par :

$x_m=\frac{-b}{2a}$

$x_1=x_m+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=x_m-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$



- $\Delta<0$: $S=\emptyset$: pas de racine réelle

C) *Exemples : tracé de fonctions*

Étudiez les fonctions suivantes : $f(x)=3x^2+4x-7$ et $g(x)=-2x^2+6x-5$ (trouvez les variations, les extremums et tracez sommairement les courbes).

Remarques :

- où se trouvent les zéros (quand il y en a) par rapport à l'extremum ?
- si on écrit la fonction sous la forme ax²+bx+c quelle est l'expression de l'extremum ?

Résoudre dans l'ensemble des réels : (a) $x^2+6x+25=0$; (b) $5x^2-9x+4=0$; (c) $4x^2+12x+9=0$

IV) Étude du signe de ax²+bx+c

Cela revient à la résolution de l'inéquation ax²+bx+c>0 dans l'ensemble des réels.

A) *Si Δ>0*

On peut factoriser le polynôme sous cette forme : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Nous allons faire un tableau de signe (nous choisissons $x_1<x_2$) :

x	$-\infty$ x_1	x_2	$+\infty$
$(x-x_1)$	-	+	+
$(x-x_2)$	-	-	+
$a(x-x_1)(x-x_2)$	+a	-a	+a

Nous en déduisons que le signe de ax²+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de -a à l'intérieur des racines.

B) *Si Δ=0*

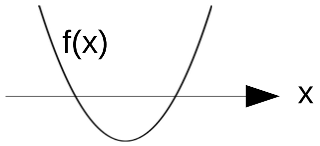
Le système factorisé revient à $a(x-x_m)^2$ qui est toujours du signe de a et qui ne s'annule qu'en x_m .

C) *Si Δ<0*

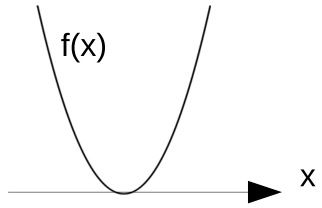
le polynôme est du signe de a.

D) *Résumé du signe de* $f(x)=ax^2+bx+c=0$

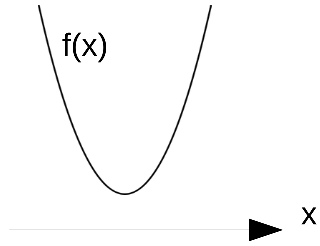
Suivant où se trouve l'axe des abscisses, nous voyons que nous avons trois possibilités :



le signe de f(x) est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de -a à l'intérieur des racines.



f(x) est toujours du signe de a et s'annule en x_m sa racine



f(x) est toujours du signe de a

Exemples : donnez les signes de (a) $x^2+6x+25$;

(b) $5x^2-9x+4;(c)4x^2+12x+9$ en fonction de x

E) *Exercices*

Donner le signe des fonctions suivantes en fonction de x :

$f(x)=13x^2+4x+1$ $g(x)=-5x^2+9x+6$ $h(x)=-x^2+5x-8$

$u(x)=x^2-9$ $v(x)=x^2+16$

V) Résolution de l'équation ax²+bx+c=0 dans l'ensemble des complexes (a,b,c réels)

Ceci est uniquement intéressant quand Δ<0.

Ceci donne deux solutions : $S=\left\{x_1=\dfrac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a}, x_2=\dfrac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Remarque : dans ce cas, si on demande l'étude signe, dans $\mathbb{R}$, il est constant, c'est-à-dire celui du coefficient de x². Les racines complexes n'interviennent pas du tout.

A) *Exemples*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : (a) $x^2+6x+25=0$; (b) $5x^2-9x+4=0$;

(c) $4x^2+12x+9=0$

B) *Exercice d'application au GEii*

1) Trouvez les racines du polynôme du second degrés : $P(p)=p^2+2z\omega_n p+\omega_n^2$ où z et ω_n sont des constantes réelles positives.

- Calculer la valeur du discriminant et discuter son signe suivant la valeur de z
- Dans chaque cas Δ≥0 et Δ<0, donner la valeur des racines et placer ces racines dans le plan complexe.
- Faire les 2 applications numériques en plaçant les racines dans le plan complexe.
  - z=1,7 $\omega_n=150\,rd/s$
  - z=0,8 $\omega_n=150\,rd/s$

2)Trouvez les racines dans l'ensemble des complexes et faites l'étude de signe sur l'ensemble des réels pour les fonctions suivantes :

$f(x)=x^2+4x-12$; $g(x)=2x^2-5x+7$; $h(x)=-x^2+6x-9$;

$k(x)=x-3x^2+1$; $l(x)=-3x^2+8x-6$

Résolvez rapidement pour les précédentes fonctions l'inégalité g(x)>-6, l(x)<6

Tracer rapidement les graphes des fonctions suivantes : f(x), h(x) et l(x)

Semaine 8 : La forme trigonométrique des complexes

I) Coordonnées polaires

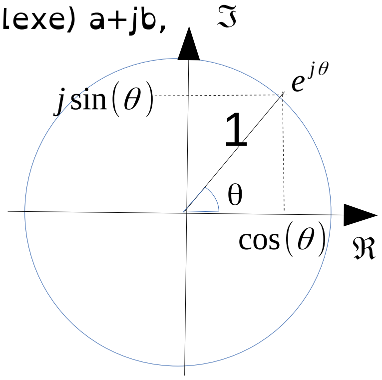
Nous pouvons repérer un point dans le plan par ces coordonnées polaires : la distance du point M au centre, ou longueur du segment [OM] : $\rho=\overline{OM}$ et l'angle entre l'axe des ordonnées et le vecteur $\overline{OM}$: $\theta=(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})$.

Comme toute distance, $\rho=\overline{OM}$ est à valeur positive ou nulle, $\rho\geq 0$.

Le couple ρ , θ forme les **coordonnées polaires** du point M.

II) Forme trigonométrique d'un complexe

Si M est le point d'affixe (les coordonnées dans le plan complexe) a+jb, on a $a=\rho\cos\theta$ et $b=\rho\sin\theta$ d'où $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$



$\rho=|z|$ est appelé le module de z et est toujours positif.

$\theta=arg(z)$ est appelé argument de z. Il est défini à 2π près (π pour la tangente).

Remarques :

- si z=0, θ n'est pas défini.
- En mathématiques, l'angle est toujours en radian. Ici, θ sera donc en radian, même si dans d'autres domaines d'utilisation, il peut être noté en degré.
- Comme on a vu dans le cours sur atan la semaine dernière : $\theta=atan2(a,b)$

Écriture sous la forme trigonométrique :

Dans la forme algébrique, on fait apparaître la partie réelle et la partie imaginaire.
Dans la forme trigonométrique, on fait apparaître le module et l'argument.

forme algébrique : $z=a+jb=\rho\cos(\theta)+j\rho\sin(\theta)=\rho(\cos(\theta)+j\sin(\theta))=[\rho,\theta]$

III) Opérations avec la forme trigonométrique

A) *Addition*

Calculez $\sqrt{2}\cdot e^{j\pi/4}+2\cdot e^{j\pi/3}=$

$\sqrt{2}\cdot e^{j\pi/4}-2\cdot e^{j\pi/3}=$

B) *Multiplication*

À retenir : lors de la multiplication de deux complexes, le module du produit est la multiplication des modules et l'argument du produit est la somme des arguments.

IV) Écriture exponentielle des complexes

- Nouvelle écriture : exponentielle complexe $\boxed{\cos(\theta)+j\sin(\theta)=e^{j\theta}}$
- forme exponentielle : $\boxed{z=\rho e^{j\theta}}$

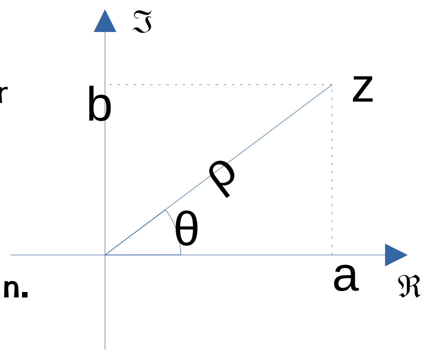
Cette écriture permet de retrouver les propriétés de l'exponentielle en utilisant sur $\mathbb{C}$ les propriétés de l'exponentielle trouvées sur $\mathbb{R}$ $\left(e^a\cdot e^b=e^{a+b}\right)$: avec $z=\rho\cdot e^{j\theta}$ et $z'=\rho'\cdot e^{j\theta'}$ nous avons : $z\cdot z'=\rho\cdot\rho'\cdot e^{j(\theta+\theta')}=\rho_2 e^{j\theta_2}$, soit par identification :

$\rho_2=\rho\cdot\rho'$ et $\theta_2=\theta+\theta'$. Nous voyons donc que la multiplication est très simple avec la notation trigonométrique.

Pour nous et généralement :

forme trigonométrique = forme exponentielle

La formule et le dessin suivant sont à connaître par cœur



$$z=\rho e^{j\theta}=\rho(\cos\theta+j\sin\theta)=\rho\cos\theta+j\rho\sin\theta$$

La **seule écriture mathématique** de la forme trigonométrique est la forme exponentielle :

$z=a+jb=\rho(\cos\theta+j\sin\theta)=\rho e^{j\theta}$ où θ est **en radian.**

Dans d'autres matières de GEii, pour des raisons de commodité graphique, on utilise aussi la forme : $z=a+jb=\rho(\cos\theta+j\sin\theta)=[\rho,\theta]$ où θ est **en degrés**

Complexe conjugué : $\bar{z}=a-jb=\rho e^{-j\theta}$; $\bar{z}=a-jb=[\rho,-\theta]$

Exemple de conversion : A=1+j

$|A|=\sqrt{1^2+1^2}$ et $\tan(\theta)=\frac{1}{1}=1$ donc $\theta=atan(1)+k\pi=\frac{\pi}{4}+k\pi$ mais, un argument, c'est à 2π près. Il va falloir trouver le bon : $\frac{\pi}{4}$ (k=0) ou $-\frac{3\pi}{4}$ (k=1). Le choix se fait facilement avec la partie réelle. Les deux étant opposés, l'un aura son cosinus positif et l'autre son cosinus négatif. Le retour de atan étant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ correspond à un angle dont le cosinus est positif. Donc si la partie réelle est positive, on prendra comme argument le retour de atan, si la partie réelle est négative, l'argument sera le retour de l'arctan + ou - π (c'est la même chose à 2π près) on pourra adapter le choix pour que le résultat soit entre $-\pi$ et π .

Donc $1+j=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$.

Autre exemple très semblable : B=-2-2j

$|B|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ $\tan(\theta)=\frac{-2}{-2}=1$ donc $\theta=\arctan(1)+k\pi=\frac{\pi}{4}+k\pi$ (quel est l'angle dont la tangente est 1). C'est la même tangente que pour A. Sur le plan, on voit bien que l'angle n'est pas le même. En effet, la partie réelle est négative, donc, on doit ajouter ou retirer π au résultat. Ceci donne deux écritures faciles à trouver :

$\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$. Je choisirai la seconde, car elle est dans $[-\pi,\pi]$. Mais, l'autre aussi est valable.

A) <u>Exercices :</u>

Placez sur le plan complexe et donnez les formes algébriques de $C=[2{,}60°]$, $D=-3=3e^{j\pi}=[3{,}180°]$, $E=e^{j\pi/2}=1\cdot e^{j\pi/2}=[1{,}90°]$, $F=\sqrt{2}\cdot e^{j5\pi/4}=[\sqrt{2}\ ,225°]$, $G=3\ e^{-j\pi/2}=[3,-90°]$, $H=4\cdot e^{j2\pi}=[4{,}360°]$, $P=2\cdot e^{j\pi/6}$, $Q=5e^{4j\pi}$ et $N=400e^{j2\pi/3}$

Placez sur le plan complexe et donnez les formes trigonométriques $z=\rho e^{j\theta}$ **de I=1-j, K=-4, L=5j,** $M=3-\sqrt{3}\cdot j$, $R=-2+j$, $S=-4e^{5j\pi/7}$

1. Application

$\sqrt{2}\cdot e^{j\pi/4}\times 2\cdot e^{j\pi/3}=$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot e^{j\pi/4}}{2\cdot e^{j\pi/3}}=$$

2. Remarque

Autant la forme trigonométrique est intéressante pour la multiplication autant elle est encombrante pour l'addition (ou la soustraction).

B) *Les puissances*

1. Le carré

$(\rho\, e^{j\theta})^2=(\rho\cdot e^{j\theta})(\rho\, e^{j\theta})=\rho^2\, e^{j\theta}\, e^{j\theta}=\rho^2\cdot e^{j\theta+j\theta}=\rho^2\, e^{j2\theta}$.

Placez le point dont l'affixe est le carré de $2\cdot e^{j\pi/6}$.

2. La puissance nième

$(\rho\cdot e^{j\theta})^n=\rho^n\cdot e^{jn\theta}$.

3. La racine carrée

a Application

Placez sur le Plan Complexe le point M_1 dont l'affixe est $2\cdot e^{j\pi/3}$.

Placez un point N_1 dont l'affixe est le carré de . $2\cdot e^{j\pi/3}$

Placez sur le Plan Complexe le point M_2 dont l'affixe est $2\cdot e^{-j2\pi/3}$ et le point N_2 dont l'affixe est le carré de $2\cdot e^{-j2\pi/3}$.

Deux complexes peuvent-ils avoir le même carré ?

b Conclusion

Un complexe (même un réel) admet deux racines carrées opposées.

c Cas général

On cherche le complexe z tel que $z^2=\Delta$. On a $\Delta=r\, e^{j\alpha}$ et $z=\rho e^{j\theta}$.

$z^2=\Delta$ s'écrit $(\rho e^{j\theta})^2=r\, e^{j\alpha}$ => $\rho^2 e^{j2\theta}=r\, e^{j\alpha}$

À ce niveau et avant d'égaler les deux arguments, il faut se rappeler que les arguments dans le plan complexe sont définis à $2k\pi$ près : $\rho^2 e^{j2\theta}=r\, e^{j(\alpha+k2\pi)}$

En identifiant on a : $\rho^2=r$ avec ρ et r réels positif => $\rho=\sqrt{r}$

et $2\theta=\alpha+2k\pi$ => $\theta=\frac{\alpha+2k\pi}{2}=\frac{\alpha}{2}+k\pi$

Remarque : on n'a pas le droit d'écrire $z=\sqrt{\Delta}$, car la fonction racine carrée n'est définie que pour les **réels positifs.** On doit écrire **: z tel que** $z^2=\Delta$.

Exercice : trouver δ_0 et δ_1 les racines carrées de $\Delta=-1+\sqrt{3}\, j$, pour cela mettre Δ sous forme trigonométrique. Placer Δ , δ_0 et δ_1 dans le plan complexe.

C) *Application*

Calculer graphiquement et donnez la forme trigonométrique de :

P=(1+j)², R=1/(1+j), Q=(1+2j).(-1+2j) .

Calculez (choisir la meilleure méthode) puis donnez les formes algébrique et trigonométrique de :

$(1+j)e^{j\pi/3}=$

D) <u>Exercices</u>

- calculez algébriquement et graphiquement : $2j(1+j)$
- développez $(x-z_1)(x-\overline{z_1})$ où z_1 est un complexe quelconque et $\overline{z_1}$ son conjugué.
- Calculez : $20e^{j\pi/3}+\frac{300e^{2j\pi/3}}{20e^{-\pi/6}}$

Semaine 9 : Transformation écriture sinusoïdale de même pulsation

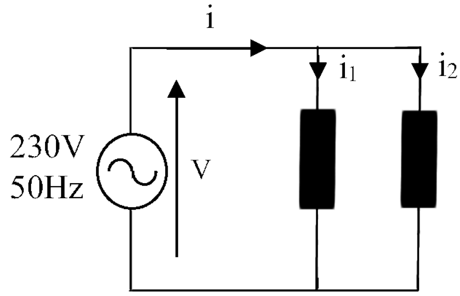
L'exponentielle complexe est : $e^{j\varphi}=\cos(\varphi)+j\sin(\varphi)$. On peut utiliser cette écriture pour additionner des sinusoïdes **de même fréquence**, mais déphasées et trouver le résultat. La partie de cette expression qui nous intéresse sera la partie réelle.

I) Un exemple simple * (pas trop en fait !)

$$\cos(\omega t)-2\cos(\omega t+\pi/3)=\Re\left(e^{j(\omega t)}\right)-\Re\left(2e^{j(\omega t+\pi/3)}\right)=\Re\left(e^{j\omega t}-2e^{j(\omega t+\pi/3)}\right)=\Re\left(e^{j\omega t}-2e^{j\pi/3}e^{j\omega t}\right)$$
$$\cos(\omega t)+2\cos(\omega t+\pi/3)=\Re\left(\left(1-2e^{j\pi/3}\right)e^{j\omega t}\right)=\Re\left(\left(1-(1+j\sqrt{3})\right)e^{\omega t}\right)=\Re\left(\left(-j\sqrt{3}\right)e^{j\omega t}\right)$$
$$\cos(\omega t)+2\cos(\omega t+\pi/3)=\Re\left(\left(-j\sqrt{3}\right)\left(\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)\right)\right)=\Re\left(-j\sqrt{3}\cos(\omega t)+\sqrt{3}\sin(\omega t)\right)$$
$$\cos(\omega t)+2\cos(\omega t+\pi/3)=\sqrt{3}\sin(\omega t)$$

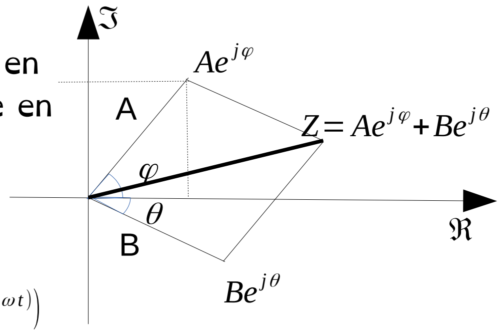
En pratique, comme ça ne marche pas toujours aussi bien, nous allons utiliser une autre méthode.

II) Méthode générale



A) Explication

Supposons $i_1=A\cos(\omega t+\varphi)$ et $i_2=B\cos(\omega t+\theta)$ (valeur que vous pouvez mesurer ou que vous pourrez bientôt calculer avec les impédances complexes). Nous souhaitons calculer $i=i_1+i_2$. On peut le faire avec le diagramme de Fresnel (ci-contre) comme vous le faîtes en ce moment en ENER. Voici la méthode que vous utiliserez en S2, même en ENER :



$$A\cos(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\theta)=\Re\left(Ae^{j(\omega t+\varphi)}\right)+\Re\left(Be^{j(\omega t+\theta)}\right)$$
$$A\cos(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\theta)=\Re\left(Ae^{j(\omega t+\varphi)}+Be^{j(\omega t+\theta)}\right)$$
$$A\cos(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\theta)=\Re\left(\left(Ae^{j\varphi}+Be^{j\theta}\right)e^{j(\omega t)}\right)=\Re\left(Se^{j(\omega t)}\right)$$

Considérons le complexe $S=\left(Ae^{j\varphi}+Be^{j\theta}\right)$. Nous pouvons trouver son module et son argument : $S=\rho e^{j\alpha}$ avec $\rho=\left|Ae^{j\varphi}+Be^{j\theta}\right|$ et $\alpha=arg\left(Ae^{j\varphi}+Be^{j\theta}\right)$

$$A\cos(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\theta)=\Re\left(\rho e^{j\alpha}e^{j(\omega t)}\right)=\Re\left(\rho e^{j(\omega t+\alpha)}\right)=\Re\left(\rho\cos(\omega t+\alpha)+j\sin(\omega t+\alpha)\right)$$

$$\boxed{A\cos(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\theta)=\rho\cos(\omega t+\alpha)} \quad \text{avec} \quad \rho=\left|Ae^{j\varphi}+Be^{j\theta}\right| \quad \text{et} \quad \alpha=arg\left(Ae^{j\varphi}+Be^{j\theta}\right)$$

B) méthode

Le but est de trouver le module et l'argument de $Z=\left(Ae^{j\varphi}+Be^{j\theta}\right)$. Avec notre calculette, on commence par trouver la forme algébrique de $Ae^{j\varphi}$ et de $Be^{j\theta}$ avec la fonction **Rec** pour additionner les parties réelles et les parties imaginaires puis trouver le module et l'argument de la somme avec la fonction **Pol.** L'amplitude sera le module de Z et le déphasage, l'argument de Z.

C) Exemple :

$$A=3\cos(\omega t+\pi/5)+5\cos(\omega t+4\pi/7)$$

En écrivant les vecteurs tournant :

$$3\cos(\omega t+\pi/5)=\Re\left(3e^{j(\omega t+\pi/5)}\right)=\Re\left(3e^{j\pi/5}e^{j\omega t}\right)$$
$$5\cos(\omega t+4\pi/7)=\Re\left(5e^{j(\omega t+4\pi/7)}\right)=\Re\left(5e^{4j\pi/7}e^{j\omega t}\right)$$

$A = \Re\left(\left(3e^{j\pi/5} + 5e^{4j\pi/7}\right)e^{j\omega t}\right) = \Re\left(Z \cdot e^{j\omega t}\right)$

rec(3;π/5) donne x=2,427 et y= 1,763, j'en déduis $3e^{j\pi/5} = 2{,}427 + 1{,}763\,j$, je fais de même pour $5e^{4\pi/7} = -1{,}113 + 4{,}875\,j$. Après, j'additionne les parties réelle et imaginaire des deux nombres : $Z = 3e^{j\pi/5} + 5e^{4j\pi/7} = 2{,}427 + 1{,}763\,j - 1{,}113 + 4{,}875\,j = 1{,}314 + 6{,}638\,j$

pol(1,314;6,638) donne r=6,767 et θ =1,375, donc $Z = 1{,}314 + 6{,}638\,j = 6{,}767\,e^{1{,}375\,j}$ d'où $A = \Re\left(Z \cdot e^{j\omega t}\right) = \Re\left(6{,}767\,e^{1{,}375\,j}\,e^{j\omega t}\right) = \Re\left(6{,}767\,e^{j(\omega t + 1{,}375)}\right)$

Le résultat sera donc : $A = 6{,}767\cos(\omega t + 1{,}375)$

D) *Écriture du sinus*

À l'aide de cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sin(a)sin(b), nous allons calculer :

$\cos(\omega t + \pi/2) =$

$\cos(\omega t - \pi/2) =$

$\cos(\omega t + \pi) =$

Donc (important pour le S2) :

$\sin(\omega t) =$ $-\sin(\omega t) =$ $-\cos(\omega t) =$

III) exercices

Exprimer à l'aide d'un seul cosinus :

$A = 3\cos(\omega t - \pi/6) + 2\cos(\omega t + \pi/4)$; $B = 3\cos(\omega t - \pi/12) - 2\cos(\omega t + \pi/5)$;

$C = 4\sin(\omega t) - 3\cos(\omega t)$; $D = 3\cos(\omega t) + 2\sin(\omega t)$

Semaine 10 : Utilisation des complexes en électricité : calculs de tension/courant

En GEii, les complexes sont utilisés en électricité pour simplifier les calculs quand dans les branches, on mélange différentes impédances passives : les résistances, des capacités et des inductances.

I) La notation complexe, l'impédance complexe

A) Courant/Tension

Dans le cas des fonctions sinusoïdales, on écrit que les grandeurs électriques courant, tension sont de la forme :

$I(t)=I_0\cos(\omega t)$, le courant est pris comme référence de phase (phase nulle)

$V(t)=V_0\cos(\omega t+\varphi)$, la tension est déphasée de φ (en avance s'il est positif) par rapport au courant

En utilisant les complexes, on écrit que ces fonctions sont la partie réelle de grandeurs complexes

$I(t)=I_0\cos(\omega t)=\Re\left(I_0 e^{j(\omega t)}\right)$ et $V(t)=V_0\cos(\omega t+\varphi)=\Re\left(V_0 e^{j(\omega t+\varphi)}\right)=\Re\left(V_0 e^{j\varphi} e^{j(\omega t)}\right)$

On appelle amplitude complexe du courant et de la tension la partie indépendante du temps de la forme complexe de ces grandeurs :

amplitude complexe de I : I_0

amplitude complexe de V : $V_0 e^{j\varphi}$

B) Impédance complexe

Définition : on appelle impédance complexe d'un composant électrique le rapport des amplitudes complexes de la tension à ses bornes et du courant qui le traverse. On la note $Z=\dfrac{V}{I}$ en complexe.

C) Résistance

Aux bornes de la résistance, le courant et la tension sont proportionnels, le rapport de proportionnalité est la résistance R : $U_R(t)=RI(t)$ et ce quelle que soit la forme temporelle du courant et donc aussi en sinusoïdal.

$I(t)=I_0\cos(\omega t)=\Re\left(I_0 e^{j(\omega t)}\right)$ => amplitude complexe I_0

$U_R(t)=RI(t)=RI_0\cos(\omega t)=\Re\left(RI_0 e^{j(\omega t)}\right)$ => amplitude complexe RI_0

L'impédance complexe de la résistance est donc $Z_R=\dfrac{RI_0}{I_0}=R$

D) Bobine, inductance

Aux bornes de la bobine, la tension est fonction de la dérivée du courant :

$U_L(t)=L\dfrac{dI(t)}{dt}=LI'(t)$. Cela donne dans le cas sinusoïdal avec

$I(t)=I_0\cos(\omega t)=\Re\left(I_0 e^{j(\omega t)}\right)$:

$$U_L(t)=L\left(I_0\cos(\omega t)\right)'=L\left(-I_0\omega\sin(\omega t)\right)=-LI_0\omega\sin(\omega t)=LI_0\omega\cos(\omega t+\pi/2)$$

$$U_L(t)=\Re\left(LI_0\omega e^{j(\omega t+\pi/2)}\right)=\Re\left(LI_0\omega e^{j\pi/2}e^{j\omega t}\right)=\Re\left(LI_0\omega\, j\, e^{j\omega t}\right)=\Re\left(jL\omega I_0 e^{j\omega t}\right)$$

car $j=e^{j\pi/2}$ => amplitude complexe de la tension $jL\omega I_0$

L'impédance complexe de l'inductance est donc $Z_L=\frac{jL\omega I_0}{I_0}=jL\omega$

<u>Exercice :</u> Si on a une fréquence de 50 Hz, une bobine de 0,319 H et, un courant I d'amplitude 1 A et de déphasage nul, caractériser la tension aux bornes de la bobine grâce à l'impédance complexe.

E) *Capacité*

Aux bornes d'un condensateur, la tension est $V_C(t)=Q(t)/C$ où C est la capacité du condensateur et Q(t) sa charge. Le courant est $I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=Q'(t)$. Dans le cas sinusoïdal, si on prend pour la tension : $V_C(t)=V_0\cos(\omega t)=\Re\left(V_0 e^{j(\omega t)}\right)$ => amplitude complexe V_0

on a $Q(t)=C V_0\cos(\omega t)=\Re\left(C V_0 e^{j(\omega t)}\right)$,

d'où $I(t)=Q'(t)=\left(C V_0\cos(\omega t)\right)'=-C V_0\,\omega\sin(\omega t)=C V_0\,\omega\cos(\omega t+\pi/2)$

$$I(t)=\Re\left(C\omega V_0 e^{j(\omega t+\pi/2)}\right)=\Re\left(C\omega V_0 e^{j\pi/2}e^{j(\omega t)}\right)=\Re\left(C\omega V_0\, j\, e^{j(\omega t)}\right)$$

=> amplitude complexe du courant $jC\omega V_0$

L'impédance complexe de la capacité est donc $Z_C=\frac{V_0}{jC\omega V_0}=\frac{1}{jC\omega}$

<u>Exercice :</u> Si on a une fréquence de 50Hz, une capacité de 31,8 µF, un courant I d'amplitude 1A et de déphasage nul, caractériser la tension aux bornes de la capacité grâce à l'impédance complexe.

F) *Impédance (à retenir)*

En résumé, les impédances complexes des trois éléments de base sont :

résistance : $Z_R=R$

Inductance : $Z_L=jL\omega$: partie imaginaire positive. Z_L est en avance de $\pi/2$ sur Z_R

Capacité : $Z_C=\frac{1}{jC\omega}=\frac{-j}{C\omega}$: partie imaginaire négative. Z_C est en retard de $\pi/2$ sur Z_R

L'intérêt de l'impédance complexe, c'est que tous les calculs des lois des mailles et des nœuds se font comme avec des résistances réelles (pont diviseur, ...).

<u>Exercice :</u> soit une maille dans laquelle circule un courant de 1A avec la capacité et l'inductance des deux précédents exercices (0,319 H et 31,8 µF). Quelle est la tension aux bornes de la maille ? (attention aux chiffres significatifs)

II) <u>Calcul simple</u>

Régulièrement, on considère plutôt qu'on a un générateur de tension. On connaît la tension en entrée et on en déduit le courant.

On aura quatre éléments distincts : un générateur de tension sinusoïdale de 100 V d'amplitude à une fréquence de 50 Hz, la bobine et la capacité de l'exercice précédent ainsi qu'une résistance de 100 Ω .

On décide que le générateur de tension génère une tension sans déphasage. C'est-à-dire qu'on calcule le déphasage par rapport à la tension de ce générateur.

A) *Circuit 1 :*

On met en série la bobine et la résistance. Quelle est l'impédance de cette branche ?

Si on la branche sur le générateur précédent, caractériser le courant qui passe dedans.

B) *Circuit 2 :*

On met en série la capacité et la résistance. Quelle est l'impédance de cette branche ?

Si on la branche sur le générateur précédent, caractériser le courant qui passe dedans.

C) *Circuit 3 :*

On met en parallèle les deux branches précédentes. On va calculer de deux façons le courant que devra débiter le générateur.

1) Utiliser la formule des résistances mises en parallèle : $R_1 \| R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ avec les impédances des deux branches pour trouver l'impédance totale branchée sur le générateur et déduisez-en le courant qu'il doit débiter.

2) Faire la loi des nœuds pour trouver le courant total à partir des calculs faits sur les deux branches séparément.

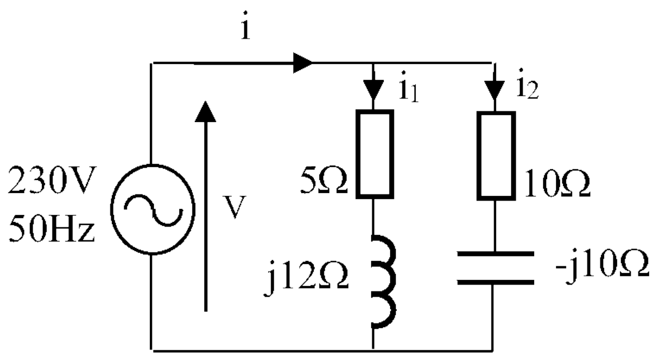
D) *Remarque :*

Nous avons eu ici que des valeurs simples pour lesquelles tous les calculs ont pu se faire à la main. Mais, dans les circuits électriques, ce n'est jamais le cas. Il faudra donc utiliser la calculatrice. Et la calculatrice a des fonctions appropriées pour faire ces calculs.

III) Calcul quelconque

Nous allons refaire les mêmes calculs que précédemment, mais, cette fois, on devra utiliser la calculette pour obtenir un résultat.

Calculer, i_1, i_2 et i. Utiliser deux méthodes pour déterminer i.



$\underline{V}$=[230 ;0°]
$\underline{I}$=[I ;-φ]

Semaine 11 : Étude de la réponse en fréquence d’un filtre : diagramme de Bode

I) présentation

En électricité, le gain est le rapport de la sortie sur l’entrée. Régulièrement, on parle de gain en tension.

Si on travaille en signal sinusoïdal, le gain $H=\frac{sortie}{entrée}$ est une grandeur complexe qui dépend de la pulsation ω , $H(\omega)\in\mathbb{C}$. Ce résultat provient des lois électriques appliquées aux impédances complexes des composants du montage. La pulsation, ω , intervient, car elle fait varier l’impédance des bobines ou capacités

Généralement, on souhaite exprimer le gain H, sous forme de produits d’éléments simples comme : une constante, $j\frac{\omega}{\omega_0}$, $1+j\frac{\omega}{\omega_0}$ ou $\frac{1}{1+j\omega/\omega_1}$. Par la suite, on étudie le module gain en décibel : $G_{dB}=20\log(|H|)$ et la phase : arg(H).

II) Réponse en fréquence d’un filtre

On connaît classiquement un filtre par sa réponse en fréquence $H(\omega)$, ou gain complexe. $H(\omega)$ est une fonction à **valeur complexe** qui donne pour **chaque valeur de la pulsation** ω :

- le rapport entre les amplitudes des sinusoïdes de sortie et d’entrée par le **module** de sa réponse $|H(\omega)|$,
- le déphasage entre les signaux sinusoïdaux de sortie et d’entrée par son **argument** (ou sa phase $arg(H(\omega))$)

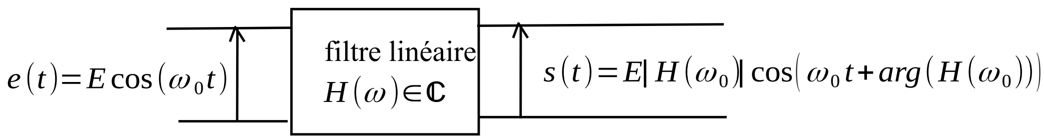


Figure 2: schéma du filtrage linéaire d'une sinusoïde

Ainsi, si $e(t)=E\cos(\omega t)$ on peut écrire alors : $s(t)=E|H(\omega)|\cos(\omega t+arg(H(\omega)))$

Si on écrit $s(t)=S\cos(\omega t+\varphi)$, on peut mesurer **expérimentalement** le module et l’argument de $H(\omega)$

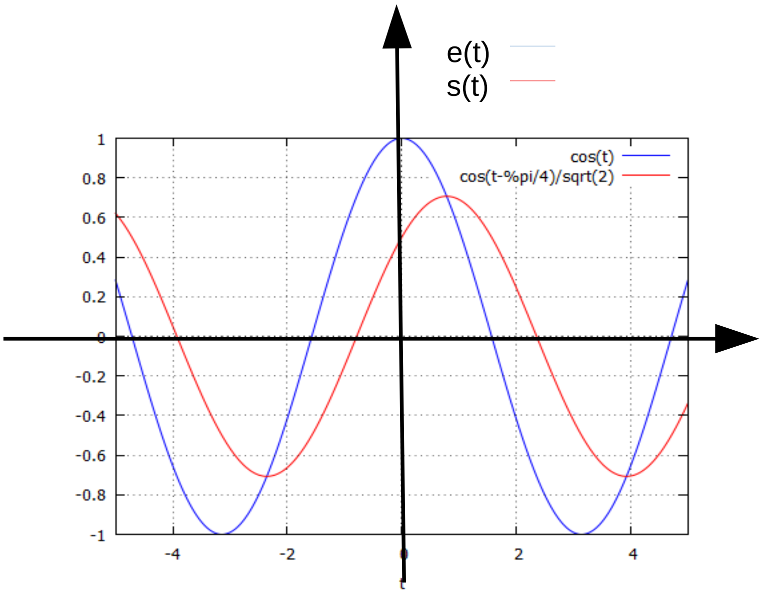
- $|H(\omega)|=\frac{S}{E}=\frac{amplitude\,de\,la\,sortie\,s(t)}{amplitude\,de\,l'\,entrée\,e(t)}$
- $arg(H(\omega))=\varphi$ = déphasage entre s(t) et e(t)

Exemple : pour un filtre RC on obtient : $H(\omega)=\frac{1}{1+RC\,j\omega}$ et ainsi

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\,\omega)^2}} \qquad \text{et} \qquad arg(H(\omega)) = -arg(1+RC\,j\omega)$$

<u>AN</u> : Si on applique en entrée une sinusoïde de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, le gain complexe devient $H(\omega_0) = \frac{1}{1+RC\,j\omega_0} = \frac{1}{1+j}$, avec $|H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $arg(H(\omega_0)) = -arg(1+j) = \frac{-\pi}{4}$.

Ainsi si $e(t) = E\cos(\omega_0 t)$, alors : $s(t) = \frac{E}{\sqrt{2}}\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})$



III) <u>Diagramme ou lieu de Bode</u>

Comme l'intervalle de variation de la variable ω est très large, on étudie $H(\omega)$ en considérant une échelle logarithmique de la variable ω.

De plus, comme les valeurs de $|H(\omega)|$ varient aussi dans des rapports très important on étudie non pas les valeurs de $|H(\omega)|$ mais le Gain exprimé en décibel (dB) qui s'écrit $G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}(|H(\omega)|)$

Afin de décrire le comportement du filtre en fonction de la fréquence, on trace le diagramme ou lieu de Bode qui est constitué de deux tracés

- $G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}(|H(\omega)|)$ en fonction de log(ω) , G_{dB} s'exprime en dB
- $\phi(\omega) = arg(H(\omega))$ en fonction de log(ω)

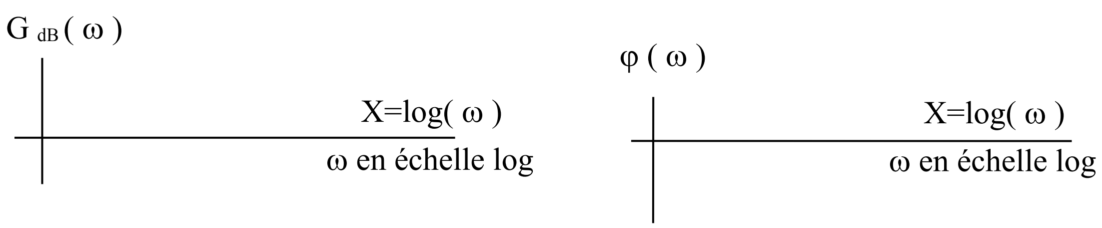


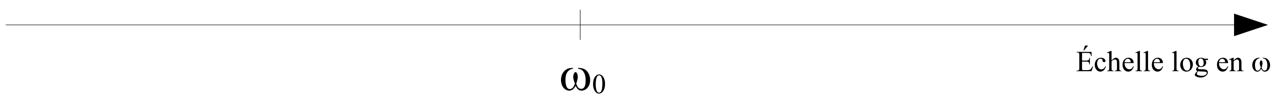
Figure 3: le diagramme ou lieu de Bode est constitué de deux tracés

On s'intéressera ici principalement au diagramme de Bode en gain : $G_{dB}(\omega)$.

On rappelle ce que l'on a vu en TD sur le logarithme :

A) *Rappel : Construction d'une échelle log pour ω*

On rappelle que sur une échelle logarithmique, une même distance correspond à un même rapport de valeur. Placer sur l'axe les valeurs des pulsations $\omega_0/100$, $\omega_0/10$, ω_0 , $10\,\omega_0$, $100\,\omega_0$, $1000\,\omega_0$



Quelle est la valeur du rapport de pulsation $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ qui donne une valeur unité (1) sur l'échelle log10 en ω : $\log_{10}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)=1$ => $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)=10^1=10$

Un rapport de 10, une décade, correspond donc à l'unité sur l'échelle log en ω.

IV) Trace de la fonction $G_{dB}(\omega)=20\log_{10}(|H(\omega)|)$ avec $H(\omega)=\frac{j\omega}{\omega_0}$

A) *Calcul des valeurs de la fonction $G_{dB}(\omega)$*

Remplir le tableau suivant :

ω	$\omega_0/100$	$\omega_0/10$	ω_0	$10\,\omega_0$	$100\,\omega_0$	$1000\,\omega_0$
$H(\omega)$						
$G_{dB}(\omega)$						

B) *Tracé de la fonction $G_{dB}(\omega)$*

Porter en ordonnée les valeurs de $G_{dB}(\omega)$ du tableau précédent avec en abscisse une échelle logarithmique pour ω.

Calculez $20\log_{10}(|H(10\omega)|)-20\log_{10}(|H(\omega)|)$, soit la différence de gain sur une décade.

<u>Filtre dérivateur</u> : en prenant une entrée $e(t)=E\cos(\omega t)$, soit s(t) la sortie définie comme la dérivée de l'entrée : $s(t)=(e(t))'=-E\omega\sin(\omega t)=E\omega\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$

- $|H(\omega)|=\frac{S}{E}=\frac{amplitude\,de\,la\,sortie\,s(t)}{amplitude\,de\,l'entrée\,e(t)}=\omega$
- $arg(H(\omega))=\frac{+\pi}{2}$ = déphasage entre s(t) et e(t)

on obtient donc $H(\omega)=j\omega=\frac{j\omega}{1}$ cela correspond au filtre que l'on vient d'étudier avec $\omega_0=1$

Le filtre $H(\omega)=\frac{j\omega}{\omega_0}$ correspond donc à un montage dérivateur.

De même, on montre que le filtre $H(\omega)=\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0}}=\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{-1}$ correspond au montage intégrateur.

V) Trace de la fonction $G_{dB}(\omega)=20\log_{10}(|H(\omega)|)$ avec $H(\omega)=(\frac{j\omega}{\omega_0})^n$

A) Calcul des valeurs de la fonction $G_{dB}(\omega)$

Remplir le tableau suivant :

	$\omega_0/100$	$\omega_0/10$	ω_0	$10\,\omega_0$	$100\,\omega_0$	$1000\,\omega_0$
H(ω)						
$G_{dB}(\omega)$						

B) Tracé de la fonction $G_{dB}(\omega)$

Porter en ordonnée les valeurs de $G_{dB}(\omega)$ du tableau précédent avec en abscisse une échelle logarithmique pour ω .

Calculez $20\log_{10}(|H(10\omega)|)-20\log_{10}(|H(\omega)|)$, soit la différence de gain sur une décade.

VI) Trace de la fonction $G_{dB}(\omega)=20\log_{10}(|H(\omega)|)$ avec $H(\omega)=1+\frac{j\omega}{\omega_0}$

A) Calcul des valeurs de la fonction $G_{dB}(\omega)$

Remplir le tableau suivant :

ω	$\omega_0/100$	$\omega_0/10$	ω_0	$10\,\omega_0$	$100\,\omega_0$	$1000\,\omega_0$
$H(\omega)$						
$\lvert H(\omega)\rvert$						
$G_{dB}(\omega)$						

B) Tracé de la fonction $G_{dB}(\omega)$

Porter en ordonnée les valeurs de $G_{dB}(\omega)$ du tableau précédent avec en abscisse une échelle logarithmique pour ω .

Calculez $20\log_{10}(|H(10\omega)|)-20\log_{10}(|H(\omega)|)$, soit la différence de gain sur une décade, pour les valeurs de $\omega \to \infty$

Semaine 12 : Tracé du diagramme asymptotique de Bode

I) Rappel : étude de la forme de base $H(\omega)=\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^n$

$$G_{DB}=20\log_{10}|H(\omega)|=20\log_{10}\left|\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^n\right|=20\log_{10}\left(\left|\frac{j\omega}{\omega_0}\right|^n\right)=20\,n\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$G_{dB}=20\,n\left(\log_{10}(\omega)-\log_{10}(\omega_0)\right)=20\,n\left(X-\log_{10}(\omega_0)\right)$$

Ce tracé est de la forme : Y=aX+b ;
avec comme pente

$\frac{\Delta Y}{\Delta X}=a=20n$. On a

$$\Delta X=X_2-X_1=\log_{10}(\omega_2)-\log_{10}(\omega_1)=\log_{10}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)=$$

pour $\frac{\omega_2}{\omega_1}=10$ soit une décade.

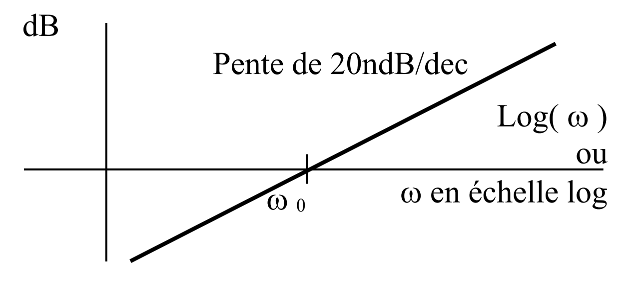


Figure 4: diagramme de Bode en gain

On a donc une pente de 20 n dB/dec

Ce tracé de base est sans approximation asymptotique, car elle n'est pas nécessaire ici.

Valeur particulière : $G_{DB}=0=20\left(\log_{10}(\omega)-\log_{10}(\omega_0)\right)$ si $\omega=\omega_0$

Pour le tracé de l'argument (phase) on a :

$$\varphi(\omega)=arg\left(H(\omega)\right)=arg\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^n=n\,arg\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)=n\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Remarque : pour un rapport de fréquence de 2 (on parle d'une octave), on a

$$\Delta X=X_2-X_1=\log_{10}(\omega_2^n)-\log_{10}(\omega_1^n)=n\log_{10}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)=n\log_{10}(2)=0{,}3010\,n$$

Et donc une pente de $\Delta=20\cdot 0{,}3010\,n=6\,n\,dB$ /octave

Exercice : étude de l'intégrateur $H(\omega)=\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0}}=\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{-1}$

Quelle est la pente du tracé de Bode ?

Quelle est la valeur de ω où le tracé coupe l'axe horizontal, où $G_{DB}=0\,dB$.

Donner la valeur de l'argument (phase) : $\varphi(\omega)=arg\left(H(\omega)\right)$

II) Tracé asymptotique des formes de bases : $H(\omega)=1+\frac{j\omega}{\omega_0}$

Quand on a une somme de termes à valeur complexe, que ce soit au numérateur ou au dénominateur de $H(\omega)$, on fait un tracé asymptotique, **dans une somme** on ne conserve qu'un seul terme :

$\omega \to 0$ on conserve la puissance de ω de plus faible degré $H(\omega) \approx H_{BF}(\omega)$

$\omega \to \infty$ on conserve la puissance de ω de plus haut degré $H(\omega) \approx H_{HF}(\omega)$

Pour la zone intermédiaire on raccorde les deux tracés par continuité, car $H(\omega)$ est une fonction continue.

Exemple : Ici,

$\omega \to 0$ on conserve la constante 1 : $H_{BF}(\omega) = 1$;

$G_{DB} = 20 \log_{10}|H_{BF}(\omega)| = 20 \log_{10}|1| = 0\,dB$ et $\varphi(\omega) = arg(H_{BF}(\omega)) = arg(1) = 0$

$\omega \to \infty$ on conserve la puissance de ω de plus haut degrés : $H_{HF}(\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0}$

$G_{dB} = 20 \log_{10}(\omega) - 20 \log_{10}(\omega_0) = 20(X - \log_{10}(\omega_0))$ et $\varphi(\omega) = arg(H_{HF}(\omega)) = arg(j) = \pi/2$

La zone intermédiaire se trouve quand les deux termes sont de même module :

$|H_{BF}(\omega)| = |H_{HF}(\omega)|$ => $1 = \left|\frac{j\omega}{\omega_0}\right|$ => $\omega = \omega_0$

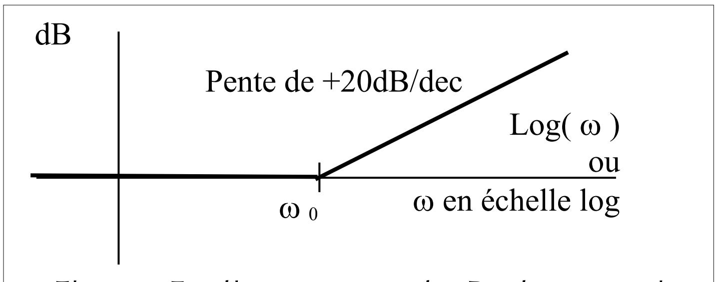


Figure 5: diagramme de Bode en gain

Valeur particulière :

$H(\omega_0) = 1 + \frac{j\omega_0}{\omega_0} = 1 + j$; $|H(\omega_0)| = \sqrt{2}$; $G_{DB} = 3\,dB$; $arg(H(\omega_0)) = \frac{\pi}{4}$

III) Tracé asymptotique des formes de bases : filtre passe bas

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$$

Trouver les formes asymptotiques de $H(\omega) \approx$

$\omega \to 0$ $|H_{BF}(\omega)| =$

$\omega \to \infty$ $|H_{HF}(\omega)| =$

Zone intermédiaire : $|H_{BF}(\omega)| = |H_{HF}(\omega)|$ =>

Valeur particulière : $H(\omega_0) =$; $|H(\omega_0)| =$

$G_{DB} =$; $arg(H(\omega_0)) =$

Autre approche : on remarque que $H(\omega)=\frac{1}{1+j\omega/\omega_0}$ est l'inverse de $1+\frac{j\omega}{\omega_0}$

Pour le tracé du gain : $G_{DB}=20\ \log_{10}|1/H(\omega)|=-20\ \log_{10}|H(\omega)|$

Pour le tracé de la phase : $arg(1/H(\omega))=-arg(H(\omega))$

Il suffit donc de changer le signe du tracé du gain et de la phase du filtre passe haut

A) *Tracé asymptotique par décomposition en formes simples :*

1. Filtre passe haut

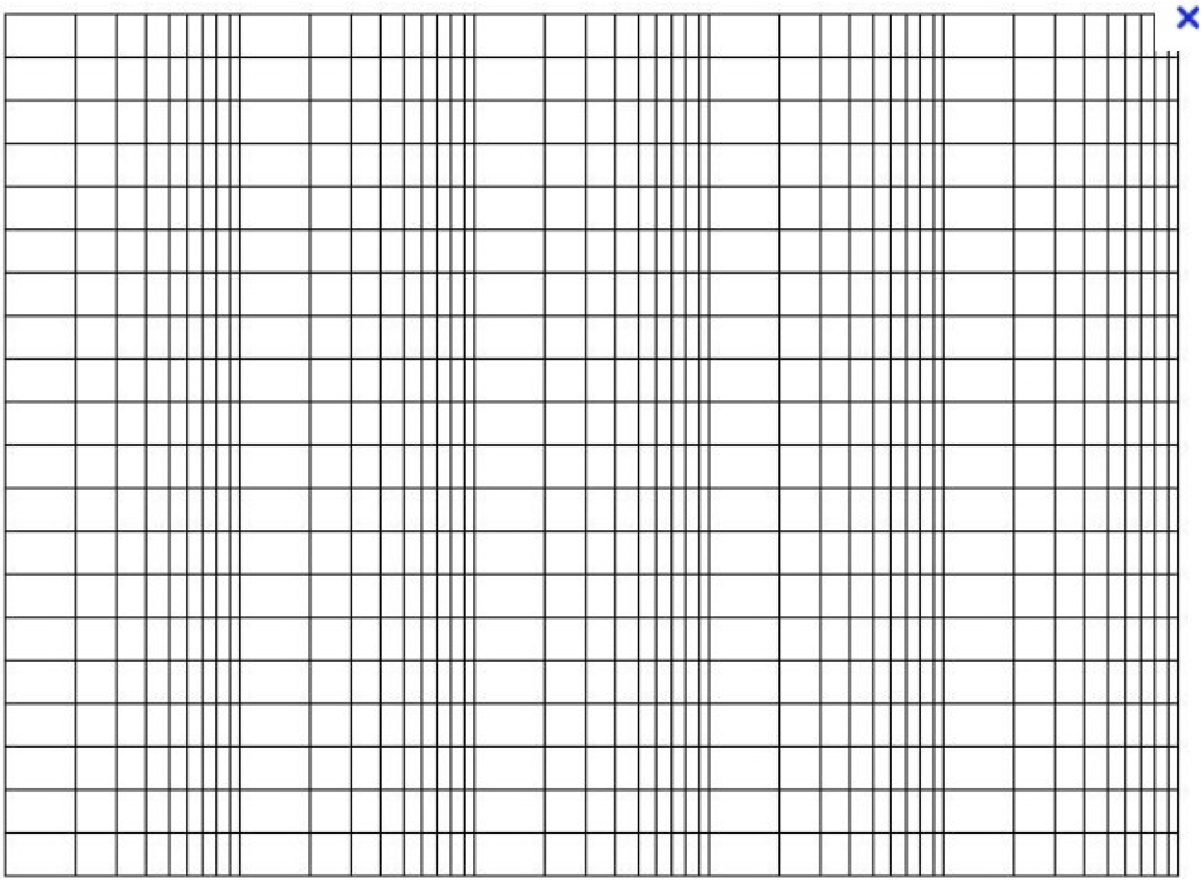
$$H(\omega)=\frac{j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0}=\frac{j\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{1+j\omega/\omega_0}$$

En utilisant log(ab)=log(a)+log(b), arg(ab)=arg(a)+arg(b) avec la dernière approche, tracer simplement la courbe.

2. Filtre passe bande

$H(\omega)=\frac{j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0}\times\frac{1}{1+j\omega/\omega_1}$ un passe haut suivit d'un passe bas.

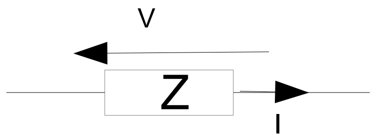
Avec la même approche, tracer la courbe correspondante (3 cas sont à prendre en fonction de ω_0 et ω_1)



IV) Exemples pratiques

Comme on est en régime **sinusoïdal**, on utilise les équations de l'électricité avec les **impédances complexes** des divers composant :

$Z_R=R$; $Z_C=\frac{1}{jC\omega}$; $Z_L=jL\omega$ qu'on applique avec la loi d'Ohm



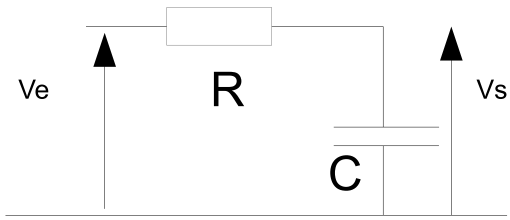
$\frac{V}{I}=Z$

Calculer la fonction de transfert $\frac{Vs}{Ve}(\omega)$ en utilisant les impédances complexes.

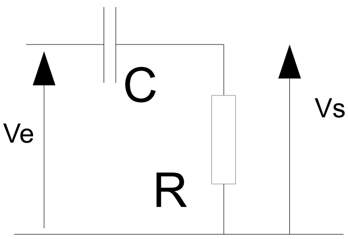
Mettre les fonctions de transfert sous **forme normalisée** avec des termes $\frac{\omega}{\omega_0}$, en exprimant la valeur de ω_0 en fonction des composants du montage.

Tracer le diagramme de Bode du gain en dB $G_{DB}(\omega)$ asymptotique, en fonction de ω en échelle logarithmique.

1) Le circuit RC :

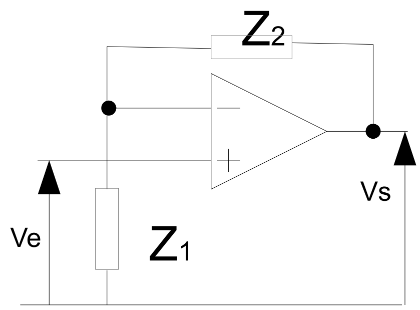


2) Le circuit CR :

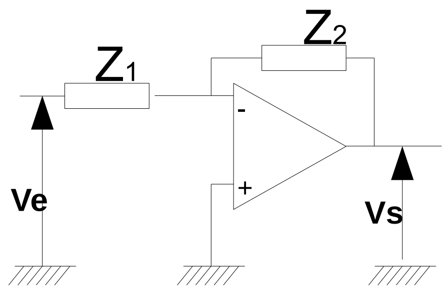


3) (les formules des montages inverseurs ou non inverseurs sont à savoir en électronique)

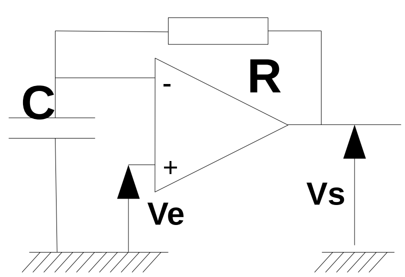
Calculer les gains des circuits suivants, trouver la valeur de ω_0 pour n'avoir que du $\frac{\omega}{\omega_0}$ dans les formules (pas de R et de C) et tracer leur diagramme de Bode :

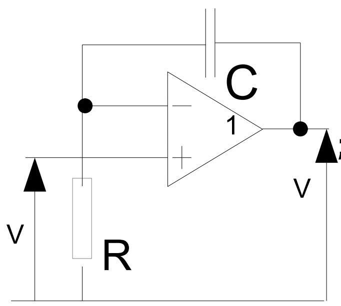


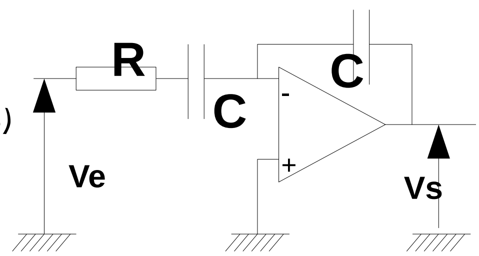
$\frac{Vs}{Ve}(\omega)=1+\frac{Z_2}{Z_1}$



$\frac{Vs}{Ve}(\omega)=\frac{-Z_2}{Z_1}$

1) 

2) 

;3) 

Semaine 13 : Fonctions définies par intervalles

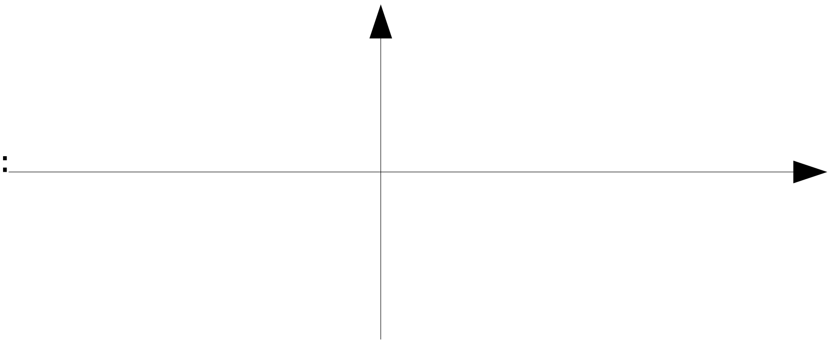
I) Présentation

Il est entièrement possible de donner une définition différente sur différents intervalles à une unique fonction. Certaines fonctions importantes au niveau du traitement du signal sont ainsi construites.

II) La fonction échelon ou fonction de Heaviside (Oliver Heaviside : 1850-1925)

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Tracez cette fonction :



Certains donnent la valeur 0 en 0, d'autre la valeur 1/2. Mais ceci n'a pas trop d'importance car cette fonction est souvent utilisée dans une intégrale.

Souvent cette fonction est aussi notée $\mathcal{U}$(x), H(x) ou $\mathbb{1}$(x).

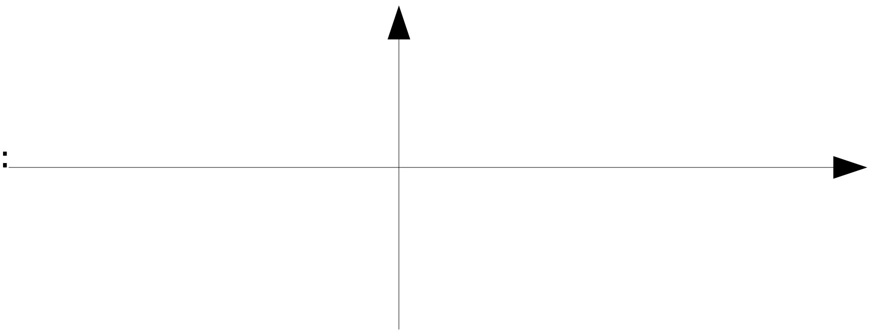
Tracer $U(x-2)$, $U(x+1)$, $2 \cdot H(x)$, $-U(x+2)$; $2U(x+1) - U(x-1) - U(x-2)$

III) La fonction porte

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Pi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| < 1/2 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} .$$

Vérifier qu'on peut écrire $\Pi(x) = U(x+1/2) - U(x-1/2)$, où U(t) est la fonction échelon

Tracez cette fonction :

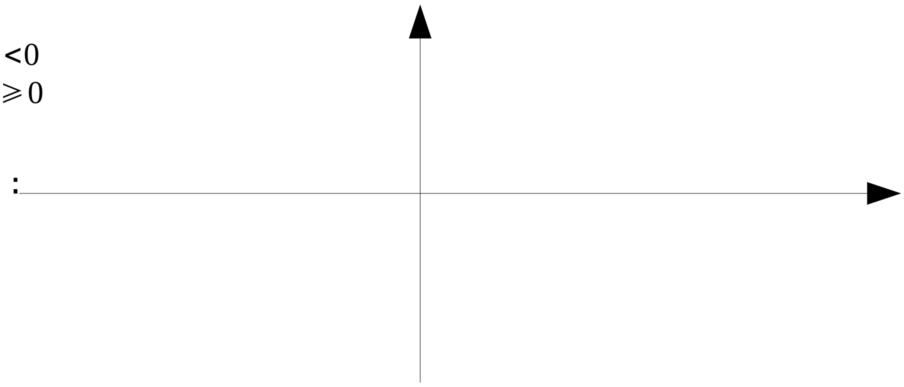


Transformez cette fonction pour qu'elle ne fasse 1 que pour t entre 3 et 4 et 0 ailleurs.

IV) La fonction rampe

$\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Tracez cette fonction :



Donnez une autre expression de cette fonction à partir de la fonction Heaviside :
R(x)=

On peut aussi écrire : $R(x) = \frac{x + |x|}{2}$. Mais, il faut convenir que la définition par intervalles est plus compréhensible.

Quelle est la dérivée de la rampe ?

V) Exercice sur la manipulation des fonctions de base

Tracer les fonctions : $a(x) = U(x-2)$; $b(x) = U(x) - 2$; $c(x) = U(x - x_0) - E$ $x_0 \, et \, E > 0$; $d(x) = U(x) - 2U(x-2) + U(x-3)$ $a(x) = R(x-2)$; $b(x) = R(x) - 2$; $c(x) = R(x - x_0) + E$ $x_0 \, et \, E > 0$; $d(x) = R(x) - 2R(x-2) + R(x-3)$ $e(x) = R(x) - R(x-2) - 2U(x-3)$;

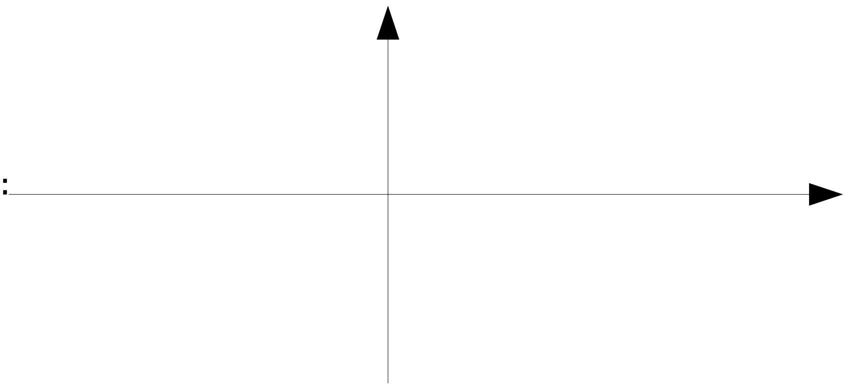
VI) La fonction en escalier (partie entière) de base

$\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \in \mathbb{Z} \, et \, E(x) \leq x < E(x) + 1$; E(x) = {l'entier qui est inférieur ou égal à x}

Donnez E(1,5)= E(2)= E(-1,5)= E(-2)=

Concluez quant à une éventuelle parité :

Tracez cette fonction :



Nous pouvons voir cette fonction comme une somme et différence infinie de fonctions Heaviside.

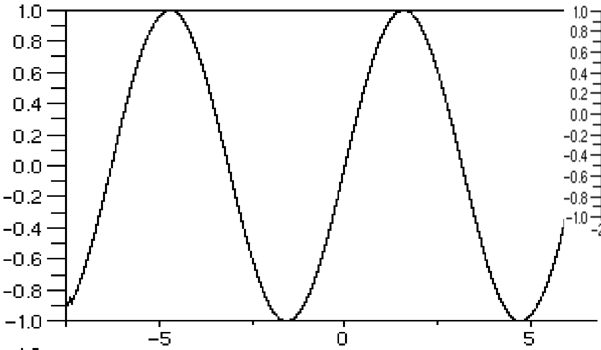
Semaine 1 : Les fonctions

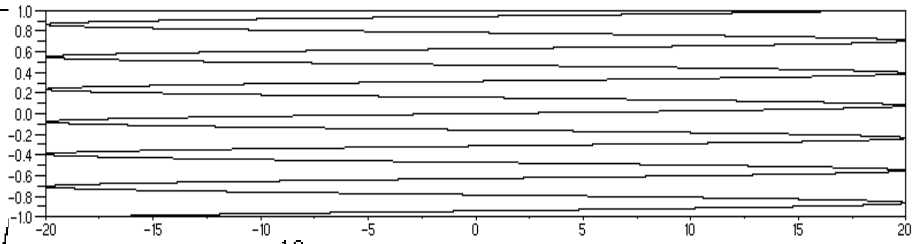
I) Définition

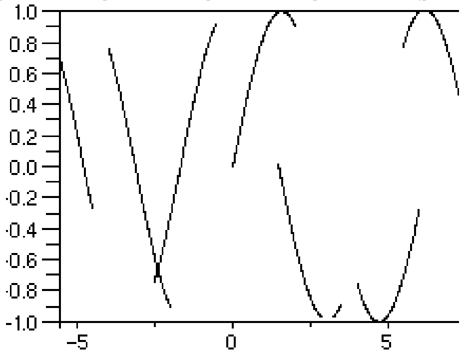
Une fonction réelle f est une relation d'une partie A de ℝ vers une partie B de ℝ où chaque élément de A a au plus une seule image dans B. C'est-à-dire que chaque élément x de A admet 0 ou 1 image notée f(x) dans B.

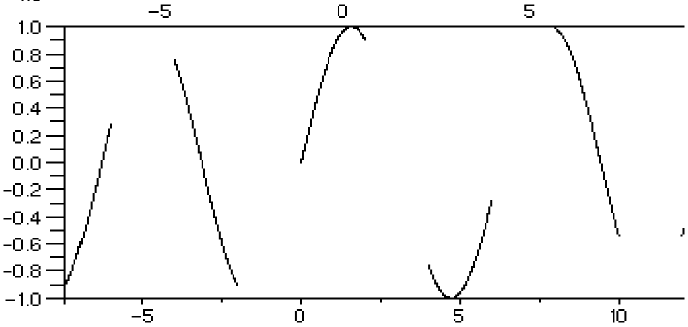
On peut aussi dire, soit f(x) n'existe pas, soit f(x) ne donne qu'une seule réponse (pas un choix).

Quels sont les graphes de fonction parmi les 4 suivants ?









Attention, il y a un piège...

II) Domaine de Définition

A) *Présentation-notation*

Soit f définie de A sur B,

On appelle ensemble de définition de f, la partie Df de A qui possède tous les éléments qui ont une image dans B par f et uniquement ceux-là. C'est à dire tous les éléments x de A tels que f(x) existe.

Remarque : Cet ensemble est noté Df. Pour une fonction g il sera noté Dg.

Exemple : h(x)=ln(x+2) ⇒ Dh=]-2 ;+∞[.

B) *Détermination de domaines de définition*

Il faut trouver les points qui génèrent des problèmes : des fonctions qui ne sont pas définies dans ℝ comme les fonctions racine, logarithme, inverse :

ln(x) ⇒ x>0, ; 1/x ⇒ x non nul ; $\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$.

Nous verrons d'autres fonctions par la suite dont le domaine de définition n'est pas ℝ : arcsin (asn), arccos (acs), Il existe encore par exemple argch (ach) ou argth (ath) qui ne sont pas étudiées en GEii.

C) *Exercices*

Donnez les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\sqrt{\ln(\mathrm{x})} \quad ; \quad \mathrm{g}(\mathrm{x})=\frac{\sin(\mathrm{x})}{\cos(\mathrm{x})+1} \quad ; \quad \mathrm{h}(\mathrm{t})=\frac{\sqrt{5-\mathrm{t}}}{\ln(\mathrm{t})} \quad ; \quad x(t)=\frac{\sqrt{\ln(t)}}{\sin(t)}$$

<u>Remarque :</u> en mathématiques, nous utilisons régulièrement x comme variable quand

il n'y en a qu'une. En sciences, la variable t est beaucoup plus utilisée : elle représente le temps. Régulièrement la fonction s'appelle x et nous avons donc x(t) où x est la fonction et t la variable.

III) Parité

La parité indiquant une symétrie en x autour du point d'abscisse x=0, avant de l'étudier, on peut vérifier que le domaine de définition est symétrique aussi par rapport à 0 (si $x \in Df$ alors $-x \in Df$).

Par exemple :

Df=]-1;1] => cette fonction ne peut avoir de parité car 1 est dans Df mais pas -1.

Df=[-4;4] ou $Df = \mathbb{R}$ = > on peut faire l'étude.

Remarques :

1) l'étude du domaine de définition n'indique pas une parité, elle peut uniquement montrer qu'il n'y en a pas.

2) les fonctions ne sont pas obligatoirement paires ou impaires, les fonctions ayant une parité sont exceptionnelles. $x+x^2$, ln(x), exp(x) par exemple n'en ont pas.

A) *Fonction paire*

Une fonction paire vérifie la propriété suivante : pour tout x : $f(-x)=f(x)$

Son graphe géométrique (courbe d'équation y=f(x))admet l'axe des y (droite des ordonnées équation x=0) comme axe de symétrie.

Pour étudier cette fonction, on peut donc faire l'étude sur la moitié positive de l'ensemble de définition et trouver l'autre par correspondance.

Exemples : cos(x), f(x)=1; $f(x)=x^2$ (polynômes avec que des exposants pairs); f(x)=cos(x)

B) *Fonction impaire*

Une fonction est impaire si et seulement si pour tout x : $f(-x)=-f(x)$

Son graphe admet l'origine (le point de coordonnées (0,0)) comme point de symétrie.

Pour étudier cette fonction, on peut donc faire l'étude sur la moitié positive de l'ensemble de définition et trouver l'autre par correspondance.

Exemples : f(x)=sin(x); f(x)=x; $f(x)=x^3$ (polynômes avec que des exposants impairs).

C) *Opération sur la parité*

Les lois sur l'addition, la soustraction, la multiplication et la division se trouvent facilement en considérant les mêmes opérations entre réel où une fonction paire est un réel positif et une fonction impaire, un réel négatif.

La somme ou soustraction de deux fonctions paires donne une fonction paire et la somme ou soustraction de deux fonctions impaires qui donne une fonction impaire. Par contre la somme ou soustraction d'une de chaque donne une fonction quelconque.

La multiplication ou division de deux fonctions paires ou de deux fonctions impaires donne une fonction paire. La multiplication ou division d'une fonction paire par une impaire donne une fonction impaire.

Exemples : donnez la parité des fonctions suivantes : $f(x)=\sin(x)\cdot(x^2+3)$,

$g(x)=(x^4+3)\cdot\cos(x)/\ln(2+x^2)$

E) *Exercices*

1) Les fonctions f, g et h dont on a étudié le domaine de définition ont-elles une parité ?

2) Trouvez la parité éventuelle des fonctions suivantes :

i(x)=ln(x²+1).sin(x) ; $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$; $\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; $th(x)=\frac{sh(x)}{ch(x)}$

(cosinus, sinus et tangente hyperbolique) ; $v(t)=\frac{t^3+\sin(t)}{\cos(t)+e^t+e^{-t}}$ (remarque $e^t+e^{-t}>1$

=> $\cos(t)+e^t+e^{-t}>0$)

IV) Périodicité

A) Définition

On dit que la fonction f est périodique s'il existe T∈ℝ+* tel que, pour tout x∈Df x+T∈Df et f(x)=f(x+T), On dit que T est une période de f.

Si T0 est la plus petite période, alors $T=nT_0$ (n∈ℕ), On dit que T_0 est la période de f.

On dit aussi que f est T_0-périodique.

B) Fonctions périodiques de base

Les fonctions périodiques de bases sont les fonctions trigonométriques : sin(x) et cos(x) ont une période de 2π alors que tan(x) a une période de π.

Ceci permet de donner la période de cos(ωt) et sin(ωt) qui est T=2π /ω car pour une période on a x=2π pour une période pour les fonctions sin(x) et cos(x) et on a donc ωT=2π pour les fonctions cos(ωt) et sin(ωt).

Ce qui donne T=2π /ω.

De même x=π pour une période de la fonction tan(x), et donc ωT=π pour la fonction tan(ωt). Ce qui donne T=π /ω.

C) Opération entre fonctions périodiques

Soient f et g deux fonctions périodiques dont les périodes sont respectivement Tf et Tg.

Si on additionne, soustrait, multiplie ou divise f et g on obtient une fonction périodique si et seulement si $Tf/Tg\in\mathbb{Q}$ (Tf/Tg est un rationnel) : c'est-à-dire qu'il peut s'écrire a/b avec a et b entier. a/b peut s'écrire de multiples façons, on ne retiendra pour la suite que la forme irréductible de la fraction (https://troumad.org/Math/nb_premiers.php#fractions).

Soit h la fonction correspondant à l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division de deux fonctions f et g dont le rapport des périodes est $\frac{T_f}{T_g}=\frac{a}{b}$, alors la valeur $T=bT_f=aT_g$ correspond à une période de la fonction h. C'est celle qu'on peut facilement trouver. Mais ce n'est pas toujours la période (la plus petite) : regardez par exemple tan(x)=sin(x)/cos(x) ou $\cos^2(x)=\frac{\cos(2x)+1}{2}$.

Pour trouver la plus petite on essaie les sous-multiples de T : T/2, T/3, … pour vérifier si ce sont aussi des périodes de h.

D) Pulsation

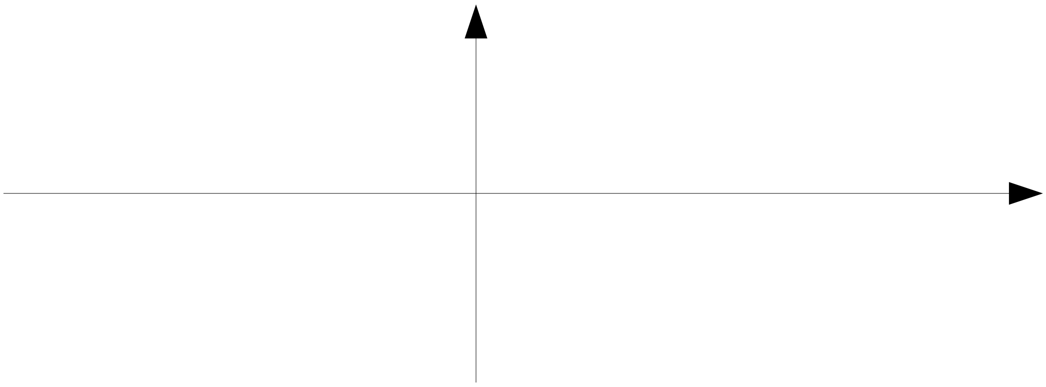
La pulsation d'un mouvement rectiligne sinusoïdale d'équation horaire x=a.cos(ωt+ϕ) avec a>0 est le nom donné au réel ω. La pulsation de cos(t) est donc 1.

Donnez le lien entre la période, la pulsation et la fréquence pour une fonction du type f(t)=a.cos(ωt+ϕ)

F) *Exercices :*

1) Les fonctions f, g et h dont on a étudié le domaine de définition ont-elles une périodicité ?

2) Tracer les fonctions cos(3t) et sin(2t), quelle est la période de f(t)=cos(3t)+sin(2t)



3) Donnez les périodes et les pulsations de f(x)=sin(6x)+cos(10x), g(x)=cos(πx).sin(10x), k(x)=cos(30x)+tan(35x) ; l(x)=sin(x/9)+cos(x/6) ; $m(x)=\sin(\pi x)+\tan(4x)$ et n(x)=sin(x).cos(x)

Compléter avec les exercices non faits de la semaine dernière

V) Exercices pour la semaine prochaine

1) a) On définit la fonction f(x) par $f_0(x)=x$ sur [0;1[tracez le graphe de $y=f_0(x)$ sur [0;1[

b) Maintenant on nous dit que ce graphe sur [0;1[est le motif d'une fonction qui a une période de 1. Tracez le graphe de cette fonction pour $x\in[-5;5]$ minimum.

2) Trouvez la période la plus simple de u(t)=30cos(28t)+28sin(30t)

Semaine 2 : Rappel des propriétés des fonctions logarithmes et exponentielles

Les deux premiers points sont à faire seul, pour vérifier que vous connaissez bien vos formules. Ils ont été traités dans le QCM de préparation pour ce TD.

I) Logarithme

Notation : la notation préconisée pour le logarithme naturel est $\ln(x)$, mais les mathématiciens « purs » préfèrent la notation $\log(x)$. C'est la notation log(x) qu'on retrouve dans les logiciels de mathématique comme Maxima, Matlab, Scilab. Excel accepte les notations ln() et log().

Domaine de définition : Dérivée : ; (ln |u|)'=

Limites aux bornes :

ln(ab)= ; ln(1/a)= ; ln(a/b)= ; $\ln(a^b)$=

$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x)=$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}=$ avec $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

II) Exponentielle

Domaine de définition : Dérivée : ; $(e^{ax})'=$

Limites aux bornes :

exp(a+b)= ; exp(-a)= ; exp(a-b)= ; exp(ab)=

$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x=$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}=$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

III) Exercices

A) *Logarithme*

Résoudre : ln(x+1)-ln(x+5)=ln13 ; ln(x+1)+ln(x+5)=ln13

B) *Exponentielle*

1) Résoudre : $e^{2x-1}=e^{x^2}$; $e^{x+2}\cdot e^{-1/x}=e$; $e^{2x}+e^x-2=0$; $2e^{3x}-3e^{2x}=0$

2) Simplifier sans calculatrice : exp(ln 6) ; exp(2 ln 3) ; exp(a ln b) ; ln(exp (-1)) ; ln(2exp 3) ; exp(x ln a) et exp(x ln x).

Remarque : a^x est défini avec exp(x ln a), donc pour a>0 uniquement.

IV) Fonction logarithme décimal : $\log_{10}$ x, échelle logarithmique

On définit $\log_{10}(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10).}$

1) Calculez $\log_{10}(10)$; $\log_{10}(1000)$; $\log_{10}(10^a)$.

2) Vérifiez les propriétés habituelles du ln sur le log : $\log_{10}(ab)$= ; $\log_{10}(1/a)$= ; $\log_{10}(a/b)$= ; $\log_{10}(a^n)$=

3) Application : l'échelle logarithmique.

Compléter le tableau suivant :

x	0,01	0,1	0,5	1	2	5	10	20	50	100	1000
X=$\log_{10}$(x)											

Placer les valeurs de petit x sur une échelle linéaire.

On peut remarquer que sur une échelle linéaire la **même distance** sur l'axe correspond à la **même différence** de valeurs (même distance entre 1 et 2 qu'entre 10 et 11).

Placer les valeurs de grand X sur la partie supérieure d'une nouvelle échelle linéaire.

Placer les valeurs de petit x correspondantes sur la partie inférieure de la même échelle. Masquer les valeurs de X. On a construit une échelle logarithmique pour les valeurs de x.

Sur les deux échelles, distingue-t'on aussi facilement toutes les valeurs ?

Sur l'échelle logarithmique à quoi correspond la **même distance** sur l'axe ?.

Placer les nombre 0 ; –0,1 sur l'échelle logarithmique. Que pensez-vous ?

Remarque : Comme il existe $\log_{10}(x)$ en base 10, avec les mêmes propriétés, on peut avoir $\log_a(x)$ en base a réel positif quelconque. $\log_2(x)$ peut-être utiliser pour le binaire.

V) Exemple d'utilisation de la fonction exponentielle

Soit la fonction : $y(x)=Ae^{-x}+Be^{-2x}$ où A et B sont des constantes

1) Calculez $y'(x)$ et $y''(x)$.

2) Montrer que la fonction y(x) vérifie la relation : $y''(x)+3y'(x)+2y(x)=0$

3) Trouver la valeur initiale $y(0)$, et la limite $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ en fonction de A et B.

4) A partir $y'(x)$, calculer la valeur de l'extremum de $y(x)$ quand il existe.

5) Étudier le cas particulier A=1 et B= -1. Vérifier les valeurs de $y(0)$ et celle de l'extremum trouvées avec A et B quelconques.

Semaine 3 : Analyse de signaux

I) Fonctions simples

Tracez les courbes représentatives des fonctions suivantes en graduant les axes :

$f(x)=ax+b$ (montrez bien a et b sur le graphe) ; $f(x)=\exp(x)=e^{x}$;

$f(x)=\exp(-x)=e^{-x}$; $f(x)=\ln(x)$

II) Fonctions composées

A) *Tracez les fonctions suivantes en graduant les axes :*

$x_1(t)=\cos(2\pi t)$; $x_2(t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$; $x_3(t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}(t-t_0)\right)$, avec t_0 petit devant T et A>0.

Remarque : en mathématique, on utilise généralement la variable x, MAIS en traitement du signal, on utilise la variable t, comme sur un oscilloscope.

Remarque : en électronique et en traitement du signal, la grandeur angulaire variable $\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ (qui est sans unité ou radian pour indiquer que c'est un angle) dépend de manière linéaire du temps (en seconde). Cette grandeur angulaire $\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ s'écrit aussi (ωt) avec ω (la pulsation en rd/s). L'utilisation de la forme $2\pi/T$ fait apparaître explicitement la période T (en seconde). Pour la valeur du temps t=T, la grandeur angulaire variable vaut $\left(\frac{2\pi}{T}T\right)=2\pi$ ce qui correspond à un tour du cercle trigonométrique.

À retenir $\boxed{\omega=pulsation=2\pi\, fréquence=\frac{2\pi}{période}}$

Ceci donne $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ où T est la période et f la fréquence.

Remarque : en électronique, électrotechnique, on ne parle pas de retard temporel $\cos(\omega(t-t_0))$, mais de déphasage $\cos(\omega t+\varphi)$. Pour la fonction $x_3(t)$ nous avons un retard de t_0, cela donne un déphasage $\cos(\omega(t-t_0))=\cos(\omega t-\omega t_0)$ de $\varphi=-\omega t_0$

Quel est le signe du déphasage ? x_3 est en avance ou en retard par rapport à x_1 ?

B) *Tracez les fonctions suivantes :*

$x(t)=\exp(-t/\tau)$ avec $\tau>0$ constante. (placer $x(\tau)$, $x(3\tau)$, $x(5\tau)$ et tracer la tangente à la courbe en 0)

$x(t)=E(1-\exp(-t/\tau))$ (placer $x(\tau)$, $x(3\tau)$, $x(5\tau)$ et tracer la tangente en 0)

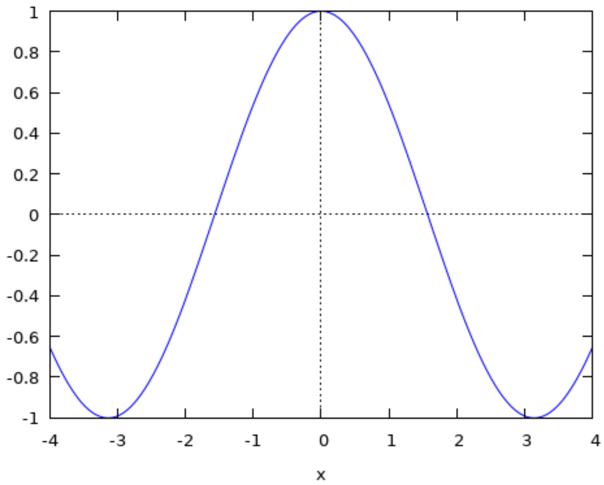
$x(t)=\frac{E_1}{T_1}t+E_2$ On prend $T_1>0$.

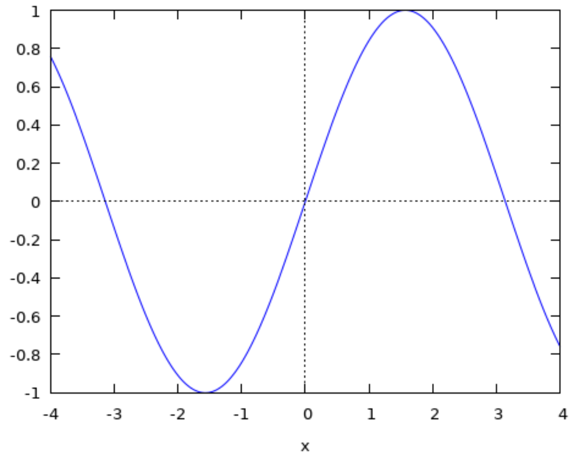
III) Fonctions simples (fait seul par l'étudiant suite au QCM)

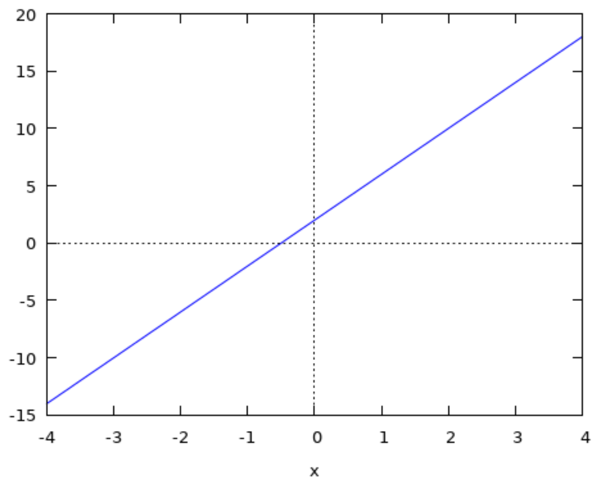
Identifier les courbes suivantes : $f(x)=ax+b$ (montrez bien a et b sur le graphe);

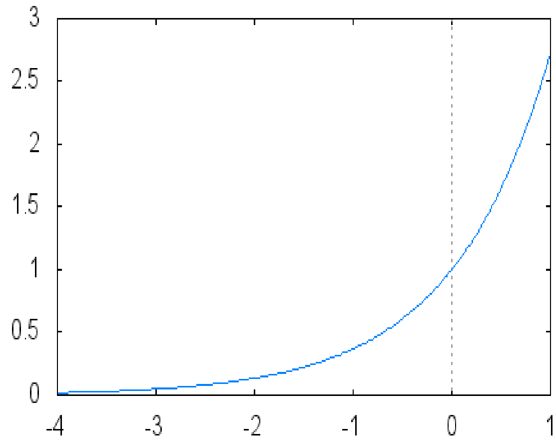
$f(x)=\exp(x)=e^x$; $f(x)=\exp(-x)=e^{-x}$; $f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=\ln(x)$, $f(x)=\sin(x)$ et $f(x)=\cos(x)$.

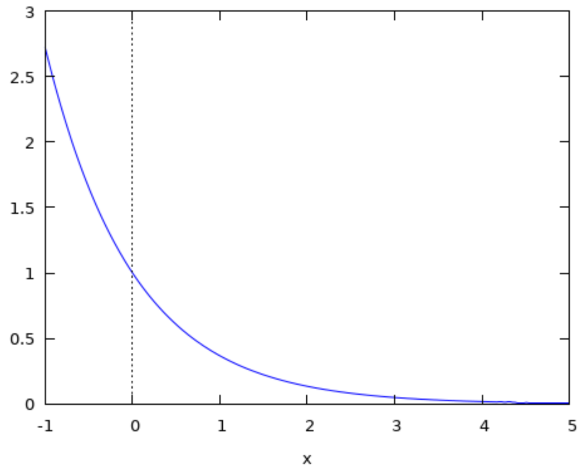
Pour ceci, il faut commencer par bien identifier les axes (c'est une bonne habitude à prendre).

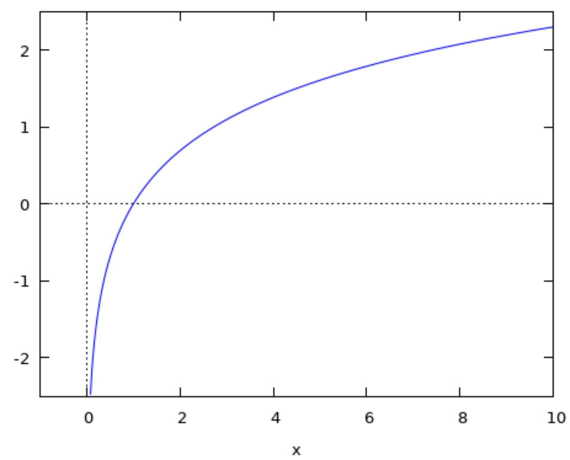


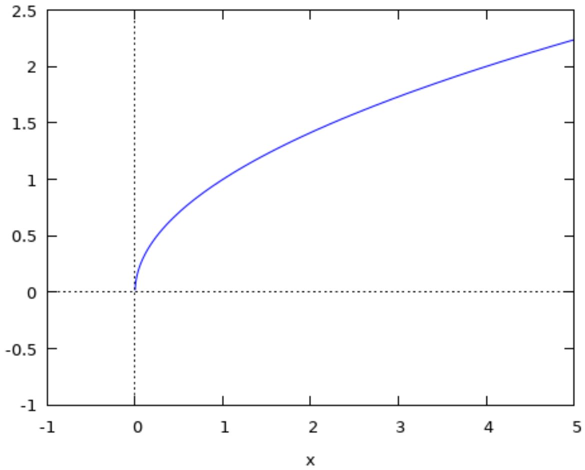


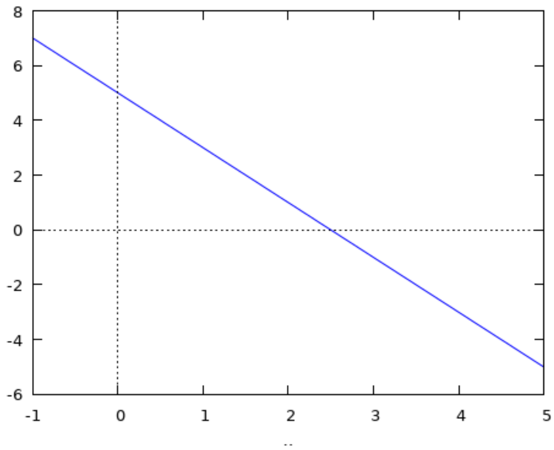








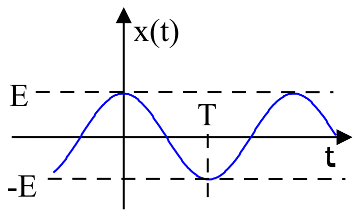
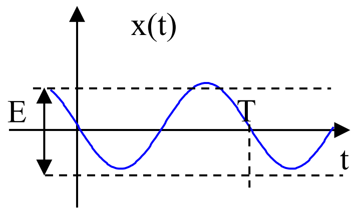
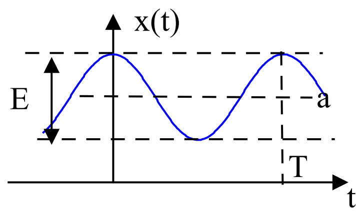
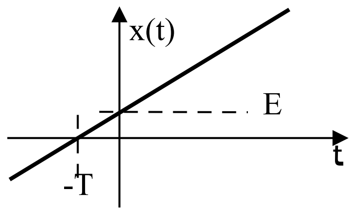
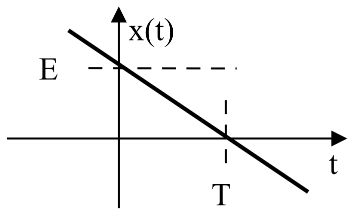
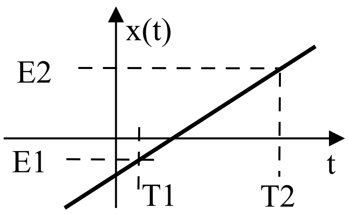




Il est important d'avoir en tête le tracé simplifié de ces fonctions.

IV) Retrouvez les fonctions

Donnez l'équation des courbes données par les graphiques suivants :

V) Exercices

Tracer la courbe représentative de la fonction y(x)=sin(x). À partir de cette courbe, construire graphiquement les courbes représentatives des fonctions :

$x_4(t)=\sin(2\pi t)$; $x_5(t)=A.\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$; f(x)=|sin(x)| et g(x)=|sin(x)|+sin(x)

Semaine 4 : Limites – Continuité

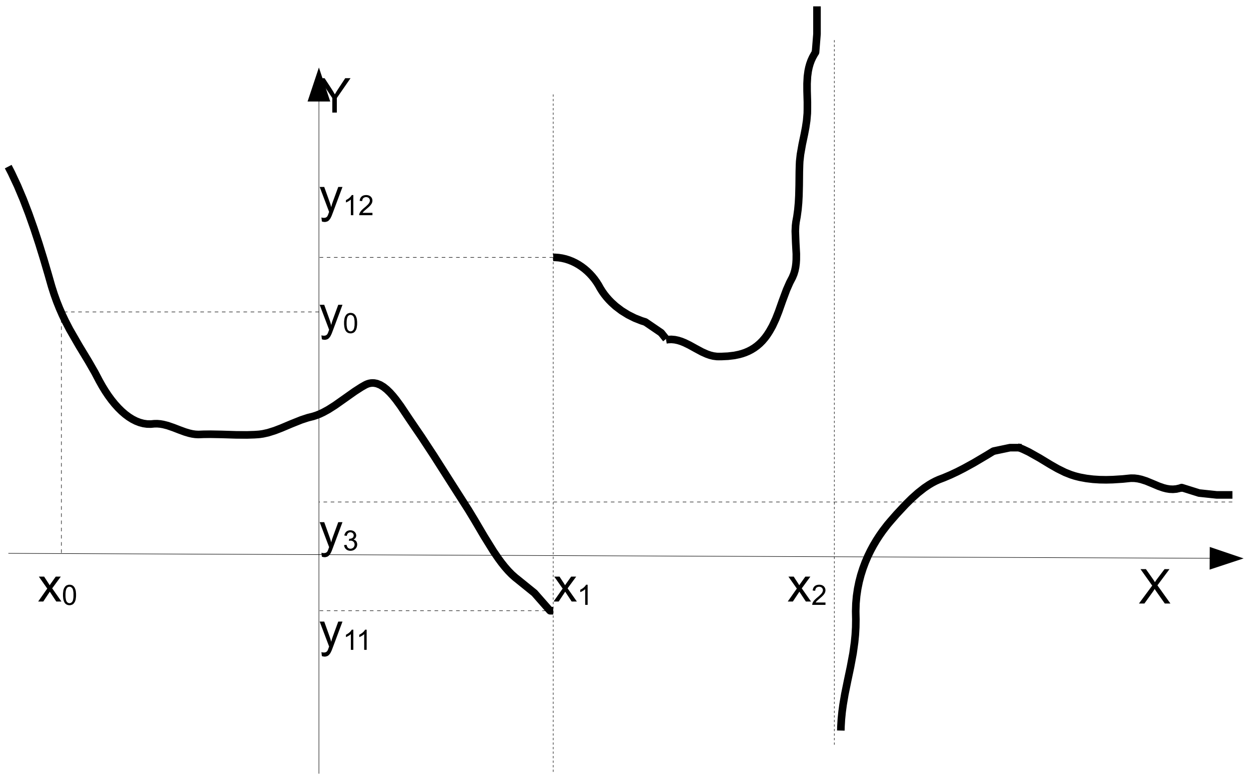
I) Notion de Limite

A) Définition

- Soit un intervalle I contenant x_0. Soit f une fonction définie sur I (sauf peut-être en x_0). On dit que f admet la limite l en x_0 pour exprimer que $f(x_0+h)$ tend vers (admet la limite) l lorsque h tend vers 0.

On écrit : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

- Si f admet une limite l en x_0 alors cette limite est unique.



C) Limites infinies

On dit que f admet en x_0 la limite $+\infty$ pour exprimer que $f(x)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut pourvu que x se rapproche suffisamment de x_0. On écrit

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\left(\forall M>0\ \exists \epsilon>0 \backslash |x-x_0|<\epsilon \Rightarrow f(x)>M \right)$

Plus concret : pour que f(x0) soit plus grand qu'un M quelconque il suffit que x0 soit assez proche de x.

On dit que f admet en x_0 la limite $-\infty$ pour exprimer que $f(x)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut pourvu que x se rapproche suffisamment de x_0. On écrit

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

D) Limites en l'infini

Soit une fonction f définie sur une demi-droite $]a\ ;+\infty[$. On dit que f admet la limite l en $+\infty$ pour exprimer que $|f(x)-l|$ peut être rendu aussi voisin de 0 que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand. On écrit : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Soit une fonction f définie sur une demi-droite]-∞ ;a[. On dit que f admet la limite l en -∞ pour exprimer que |f(x)-l| peut être rendu aussi voisin de 0 que l'on veut pourvu que x soit suffisamment petit (petit ici = proche de moins l'infini).

On écrit : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

remarque : on peut avoir l=±∞.

E) *Propriétés des limites*

1. Opération sur les limites (qui sont toutes en x_0)

$\lim f$	$-\infty$	$+\infty$	0	0^+	0^-	$l \neq 0$
$\lambda>0$; $\lim \lambda f$	$-\infty$	$+\infty$	0	0^+		λl
$\lambda<0$; $\lim \lambda f$	$+\infty$	$-\infty$	0	0^-	0^+	
$\lim 1/f$	0^-	0^+	Pas assez d'info	$+\infty$	$-\infty$	$1/l$
$\lim (f+a)$	$-\infty$	$+\infty$	a	a^+	a^-	$l+a$

lim f	lim g	lim (f + g)	lim f × g	lim f / g	lim g / f
l	l'				
$l>0$	$+\infty$				
$l<0$					
$l>0$	$-\infty$				
$l<0$					
$+\infty$	$+\infty$				
$-\infty$	$-\infty$				
$+\infty$	$-\infty$				
0^+	$+\infty$				
0^-					
0^+	$-\infty$				
0^-					
0^+	0^+				
0^+	0^-				
0^-	0^-				

2. Règle de l'Hôpital (Guillaume François Antoine 1661-1704)

Pour étudier $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ quand $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, on étudie $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ car ces deux expressions ont la même limite.

si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ **alors** $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

exemple : $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

3. Limites d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini

i) La limite de x^n (n>0) en +∞ est +∞. La limite de x^n en -∞ est +∞ si n est pair et -∞ si n est impair.

ii) La limite d'une fonction polynôme en l'infini est celle de son terme de plus haut degré.

C'est-à-dire : $si\, P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots a_1 \cdot x + a_0 \, avec \, a_n \neq 0 \, alors \lim_{x \to \infty} P(x) = \lim_{x \to \infty} a_n \cdot x^n$

iii) La limite d'une fonction rationnelle en l'infini est celle du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

C'est-à-dire : $si\, q(x)=\frac{a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots a_1\cdot x+a_0}{b_m\cdot x^m+b_{m-1}\cdot x^{b-1}+\ldots b_1\cdot x+b_0} avec\; a_n\neq 0\, et\, b_m\neq 0\, alors \lim_{x\to\infty} q(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n\cdot x^n}{b_m\cdot x^m}$

5. Limite et relation d'ordre

Si pour tout x de D, un intervalle, $f(x)\geq g(x)$ ($f\geq g$), si f et g admettent une limite (finie ou non) en x_0 élément de D alors $\lim_{x\to x_0} f(x)\geq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Si sur D , un intervalle, $f\geq g\geq h$, si f et h admettent la même limite (finie ou non) en x_0 élément de D alors g admet aussi la même limite en x_0.

Rappel : on a utilisé cette règle pour trouver $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$

F) *Exercices*

Calculez les limites en 0 des fonctions suivantes : $f(x)=\frac{\cos(x)-1}{x^2}$, $g(x)=\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ et

$h(x)=\frac{e^x-\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$.

II) Notion de continuité

A) *Continuité en x_0*

La fonction f est dite continue en x_0 si elle a pour limite $f(x_0)$ au point x_0. Sinon elle est discontinue en x_0.

f est continue en x_o si $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_o)$

La fonction f, définie sur un intervalle I non réduit à un point et contenant x_0 est continue en x_0 si, et seulement si, elle admet une limite finie en x_0.

C) *Prolongement par continuité*

Soit f définie sur un ensemble E tel que $E\cup\{x_0\}$ soit un intervalle. On suppose que f n'est pas définie en x_0 ($x_0\notin E$), admet une limite finie l en x_0.

On définit g : $E\cap\{x_0\}\to\mathbb{R}$, par $g(x)=f(x)$ si $x\in E$ et $g(x_0)=$ l.

g est le prolongement par continuité de f en x_0. On dit aussi que f est la restriction de g à E.

D) *Continuité sur un ensemble*

Une fonction f définie sur un intervalle E, est dite continue sur E lorsqu'elle est continue en tout point de E.

D'un point de vue pratique, on dit qu'une fonction est continue si on peut la tracer sans lever le crayon.

E) *Propriété de la continuité.*

1. Continuité et opération

Soient f et g continues en x_0, a un nombre réel. $f+g$; fg et af sont continues en x_0. De plus si g non nulle en x_0 alors f/g est continue en x_0.

Conséquences : toute fonction polynôme est continue. Toute fonction rationnelle est continue dans son domaine de définition (quand le dénominateur ne s'annule pas).

Si la fonction f est continue sur un intervalle, E, et si la fonction g est continue sur f(E), alors la fonction *fog* est continue sur E.

F) *Exercices*

1. Prolongement par continuité

Proposez si possible des prolongements par continuité aux fonctions suivantes :

$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ (le sinus cardinal) ; $g(t)=\frac{t.\ln(t^2)}{t^2-1}$, $|x|$, $h(x)=\frac{|x|}{x}$. $i(x)=x\cdot|x|$

2. Continues ?

A) Relever dans l'ensemble des fonctions suivantes les fonctions non continues :

1) x^2+3x-9 ; 2) sin(x); 3) tan(x); 4) $\sqrt{|x|}$; 5) $\ln|x|$; 6) E(x) (partie entière);

7) e^x ;8) U(x) (fonction échelon); 9) xU(x) (fonction rampe); 10) 1/x; 11) $1/x^2$

3. Pour le prochain TD

Finir les exercices

Semaine 5 : Intégrales – Primitives

L'intégration est un outil indispensable pour déterminer la valeur moyenne et la valeur efficace d'un courant ou d'une tension. En outre cette notion doit être parfaitement maîtrisée pour aborder des notions comme la transformée de Laplace ou les séries de Fourier.

I) Présentation des Primitives

- F est une primitive de f sur l'intervalle I si F'(x)= f(x) pour tout x appartenant à I.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.
- Si f admet une primitive F alors elle admet une infinité de primitives G sur I et les primitives de f seront de la forme G=F+k où k est une constante sur I.

Exercice d'application directe : pour trouver les primitives, on fait l'inverse de la dérivation. À partir d'une table de fonctions dérivées il est donc possible de trouver les primitives d'une fonction.

Si f est la fonction donnée par	sur l'intervalle	Elle admet une dérivée f' telle que
$f(x)=k\in\mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$]-\infty;+\infty[$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$ ou $n\in\mathbb{R}^+$	$]-\infty;+\infty[$	$f'(x)=nx^{n-1}$ (1)
$f(x)=e^x$	$]-\infty;+\infty[$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln(x)$	$]0;+\infty[$	$f'(x)=1/x$
$f(x)=\sin(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$f'(x)=\cos(x)$
$f(x)=\cos(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$f'(x)=-\sin(x)$
$f(x)=\tan(x)$	$](n-1/2)\pi;(n+1/2)\pi[$ $N\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$

(1) cette formule s'étend à n réel négatif si x est non nul.

On peut également avoir besoin de la dérivée d'une fonction composée :

$$(f\,o\,g)'(x)=(f(g(x)))'=g'(x)f'(g(x))=g'(x)\cdot f'og(x)$$

En inversant le rôle de f(x) et de f'(x) on a :

Si f est la fonction donnée par	sur l'intervalle	Elle admet une primitive F
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{R}, n\neq-1$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x)=e^x$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=e^x$
$f(x)=1/x$	$]0;+\infty[$	$F(x)=\ln(x)$
$f(x)=\sin(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=-\cos(x)$
$f(x)=\cos(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=\sin(x)$
$f(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$](n-1/2)\pi;(n+1/2)\pi[$ $N\in\mathbb{Z}$	$F(x)=\tan(x)$

En utilisant la dérivée d'une fonction composée : $g'(x)f'(g(x))$ a pour primitive $(f(g(x)))$

Si f est la fonction donnée par	sur l'intervalle	Elle admet une primitive F
$f(x)=g'(x)(g(x))^n, n\in\mathbb{R}, n\neq -1$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=\dfrac{(g(x))^{n+1}}{n+1}$
$f(x)=g'(x)e^{g(x)}$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=e^{g(x)}$
$f(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$	$F(x)=\ln(\lvert g(x)\rvert)$
$f(x)=g'(x)\sin(g(x))$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=-\cos(g(x))$
$f(x)=g'(x)\cos(g(x))$	$]-\infty;+\infty[$	$F(x)=\sin(g(x))$

Exemples d'application sur WIMS : http://wims.unice.fr/wims/

On pourra rechercher « calcul intégral » comme « activité WIMS », puis essayer les Qizz d'intégration sin/cos2 et les divers exercices de terminale.

II) Surface sous une courbe, intégrale

Si a<b, $\int_a^b f(x)dx$ est la surface entre les droites d'équation y=0, x=a, x=b et la courbe d'équation y=f(x). Les surfaces en dessous de la droite y=0 sont comptées négativement. Cette surface s'appelle **l'intégrale de f entre a à b.**

Propriété (relation surface/primitive) : $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$ où F(x) est une primitive quelconque de f(x)

III) Propriétés

Choix de la constante : pour le calcul d'une intégrale, si on prend une primitive F définie à une constante k près :

$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=(F(b)+k)-(F(a)+k)=F(b)-F(a)$, on peut donc prendre k=0 pour trouver une intégrale.

Linéarité : $\int_a^b f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

ce qui donne aussi : $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

Cette relation est très importante pour intégrer une fonction définie par morceaux.

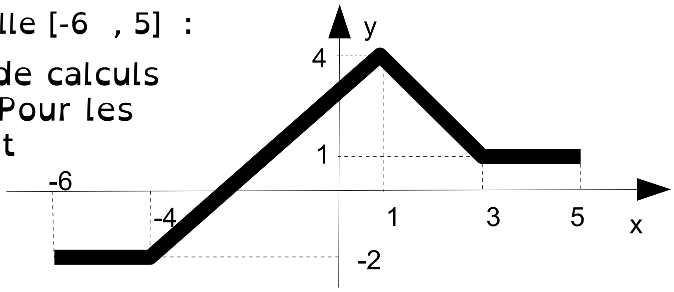
Avec a<b<c, si f(x) = $\begin{cases} f_1(x) \text{ si } x\in[a,b] \\ f_2(x) \text{ si } x\in[b,c]\end{cases}$ alors $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_b^c f_2(x)dx$

Valeur moyenne d'une fonction f sur [a;b] : $f_{moy}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Remarques : $F(x)=\int_a^x f(X)dX$ est la primitive de f qui s'annule en a car $F(a)=\int_a^a f(X)dX=0$.

IV) Exercices d'application directe :

- Voici le graphe de y=f(x) dans l'intervalle [-6 , 5] :



Donner les résultats suivants sans faire de calculs d'intégrale, juste des calculs de surface. Pour les intégrales entre -4 et 1, comme entre 1 et 3, on utilisera la moyenne pour calculer l'aire. Pour un segment, la moyenne est (max+min)/2

$\int_{-6}^{-4} f(x)dx$, $\int_{-4}^{1} f(x)dx$, $\int_{1}^{3} f(x)dx$, $\int_{3}^{5} f(x)dx$, en déduire $\int_{-6}^{5} f(x)dx$

- Tracer une fonction sinusoïdale de période T d'amplitude maximum A. Calculer graphiquement l'intégrale de cette fonction sur l'intervalle [-T/2;T/2].
- Tracer une fonction créneau de période T basculant entre A et 0 (f(t)=A si $t\in[0;T/2[$ et f(t)=0 si $t\in[T/2,T[$). Calculer graphiquement l'intégrale de cette fonction sur l'intervalle [0;T/2], [T/2;T], [0;T] et finalement sur [0 ;t] avec $t\in[0;T]$.
- Trouver graphiquement $\int_{0}^{x} t\cdot dt$. Calculez $A=\int_{1}^{2}\left(x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$; $B=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{(x)}}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$

Semaine 6 : Applications au génie électrique : moyenne et valeur efficace

I) Valeur moyenne, puissance et valeur efficace

On appelle valeur moyenne d'une fonction f sur [a;b] le nombre noté f_{moy} défini par $f_{moy}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

On appelle puissance moyenne d'une fonction f sur [a;b] le nombre noté f_{Pmoy} défini par $f_{Pmoy}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt$, c'est la valeur moyenne du carré de la fonction f (ce qui se dit Mean Square, soit MS, en anglais, *mean pour valeur moyenne, square pour carré*)

On appelle valeur efficace d'une fonction f sur [a;b] le nombre noté f_{eff} défini par $f_{eff}=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt}$, c'est la racine carrée de la puissance moyenne, donc la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la fonction f (ce qui se dit Root Mean Square en anglais, soit RMS, *root pour racine*).

Cas des fonctions périodiques : la mesure de la moyenne, de la valeur efficace se fait sur une période T de la fonction f, $[a,b]=une\ période\ de\ f(t)$ (ou un nombre entier de période).

Cas d'une fonction constante : soit $f(t)=E$, on $f_{moy}=E$, $f(t)^2=E^2$, $f_{Pmoy}=E^2$ et $f_{eff}=\sqrt{E^2}=|E|$

Signification de la valeur efficace : c'est la valeur constante qui possède la même puissance moyenne que la fonction. Comme la puissance moyenne d'une constante de valeur f_{eff} vaut $f_{eff}^{\ 2}$, on obtient :

$$f_{eff}^{\ 2}=f_{Pmoy}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt \quad => \quad f_{eff}=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt}$$

Cas sinusoïdal très important : la puissance moyenne d'un signal sinusoïdal d'amplitude A est :

$$f_{Pmoy}=\frac{1}{T}\int_\theta^{\theta+T}\left(A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)^2 dt=\frac{A^2}{T}\int_0^T\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)^2 dt=\frac{A^2}{T}\int_0^T\left(\frac{1+\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)}{2}\right)dt$$

$$f_{Pmoy}=\frac{A^2}{2T}\left[t+\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right]_0^T=\frac{A^2}{2T}(T-0)=\frac{A^2}{2}$$

sa valeur efficace est donc : $f_{eff}=\frac{A}{\sqrt{2}}$

Exemple

Calculer la moyenne et la puissance moyenne du signal dent de scie ci-contre
En déduire la valeur efficace de ce signal.

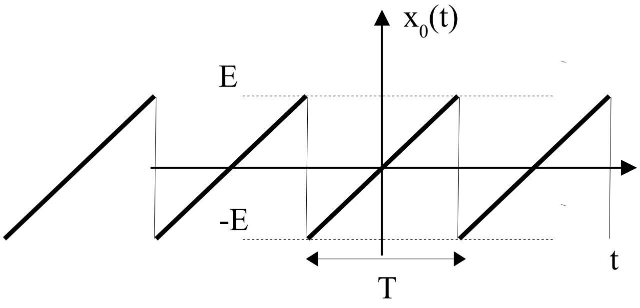


Figure 6: Dent de scie centrée

1) Équation du signal sur une période de notre choix. On choisit la période]-T/2,T/2[car c'est la plus simple.

Nous avons une droite qui passe par l'origine : $x_0(t)=at$ où a est la pente. De 0 à T/2 la droite monte de E, sa pente est donc de E/(T/2)=2E/T. L'équation est donc : $x_0(t)=2Et/T$ (nous pouvons vérifier l'homogénéité de la formule).

2) Calcul de la moyenne : $M=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{2E}{T}t\,dt=0$ nous pouvons assurer que le résultat est nul car nous faisons une intégrale d'une fonction impaire entre deux bornes opposées. Nous pouvons aussi dire que les surfaces de droite (au-dessus de l'axe des abscisses) et de gauche (au-dessous de l'axe des abscisses) sont égales, mais la première est comptée positivement et la seconde négativement. Donc le total est nul.

3) Calcul de la puissance moyenne :

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{2E}{T}t\right)^2dt=\frac{4E^2}{T^3}\int_{-T/2}^{T/2}t^2dt=\frac{4E^2}{T^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-T/2}^{T/2}=\frac{4E^2}{T^3}\left(\frac{(T/2)^3}{3}-\frac{(-T/2)^3}{3}\right)=\frac{4E^2}{T^3}\frac{T^3}{12}=\frac{E^2}{3}$$

4) Calcul de la valeur efficace : $V_{eff}=\sqrt{P}=\frac{E}{\sqrt{3}}$

II) Exercices

Exercice 1 :

Calculer la moyenne et la puissance moyenne d'un signal impulsionnel de période T, d'amplitude E, de largeur τ et de rapport cyclique $\alpha=\frac{\tau}{T}$

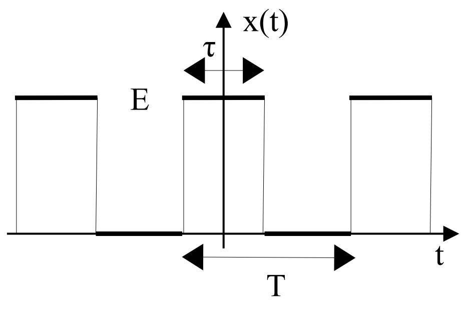


Figure 7: impulsion rectangulaire positive de largeur T et de rapport cyclique $\alpha = \tau/ T$

Exercice 2

Calculer la moyenne et la puissance moyenne du signal dent de scie $x_1(t)$ représenté ci-contre.

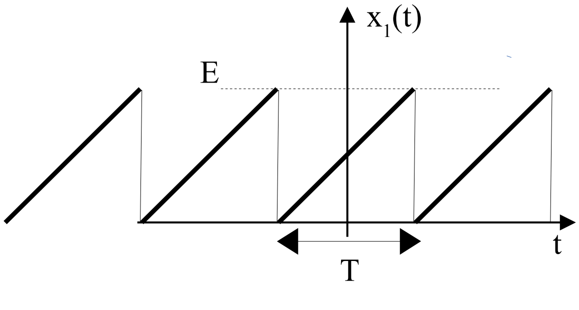


Figure 8: signal dent de scie de période T

Exercice 3

Calculer la moyenne et la puissance moyenne du signal sinus redressé représenté ci-contre.

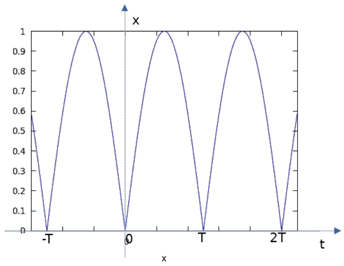


Figure 9:sinus redressé

Exercice 4

Calculer la moyenne et la puissance moyenne du signal sinus mono-redressé représenté ci-contre.

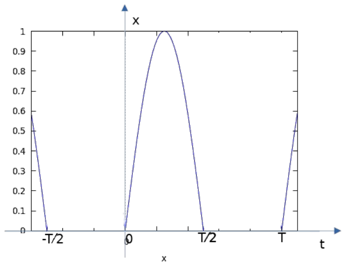


Figure 10:sinus mono-redressé

Exercice 5

Soit un signal x(t) de période T dont la moyenne est M. Soit la fonction $x_{ond}(t)=x(t)-M$

1) Écrire la formule qui permet de trouver M

2) Calculer la moyenne de $x_{ond}(t)$.

3) Écrire la formule qui permet de calculer la puissance moyenne de x(t) et celle de $x_{ond}(t)$

4) Remplacer dans la formule de la puissance moyenne de $x_{ond}(t)$, $x_{ond}(t)$ par x(t)-M, développer le carré. Grâce à la linéarité de l'intégration, exprimer la puissance moyenne de $x_{ond}(t)$ en fonction de celle de x(t) et de M.

Le résultat est une formule super importante à connaître en électricité.

5) Vérifier cette relation avec les deux signaux à dent de scie (ne pas oublier d'adapter l'amplitude)

6) Utiliser cette formule pour calculer la puissance ondulatoire des signaux des exercices 1, 3 et 4.

Semaine 7 : Atan et sinc

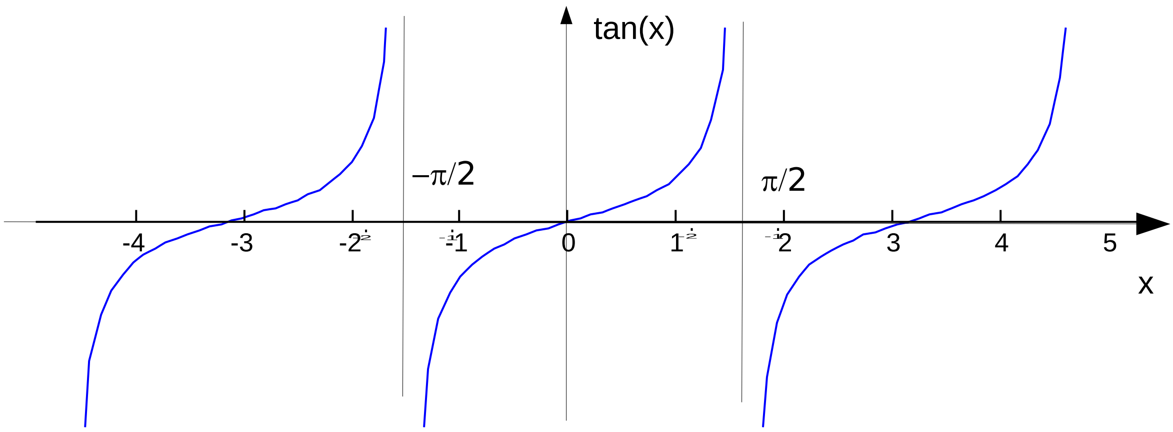
II) La fonction arc-tangente

1. Définition

La fonction appelée arctangente est notée atan, atn et anciennement arctan.
C'est la fonction qui répond à la question :

quel est l'angle dont la tangente est ___ ?

Préciser les points particuliers sur la courbe de la fonction tangente.

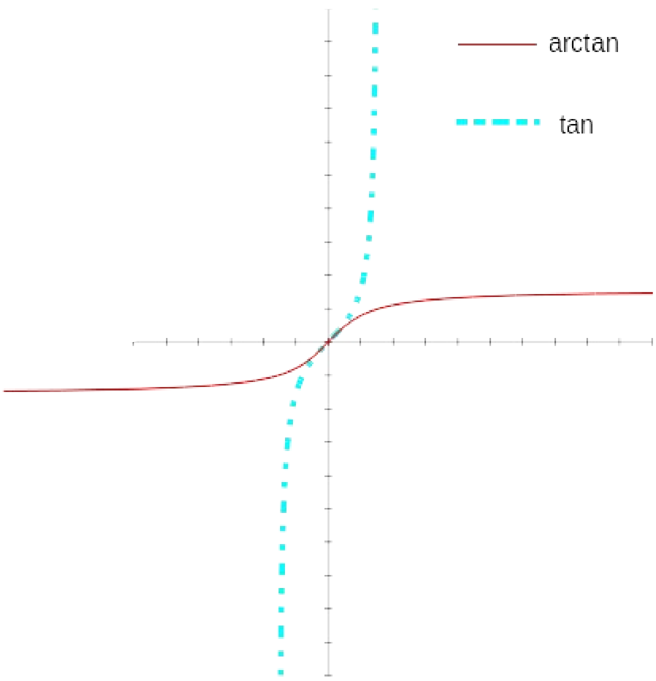


La restriction sur $]-\pi/2;\pi/2[$ de tan(x) est une bijection de $]-\pi/2;\pi/2[$ sur $]-\infty;+\infty[$, car tan(x)' =1+tan(x)² est strictement positif sur]- π/2 ;π/2[, donc tan(x) est strictement croissante sur cet intervalle.

Par convention, on a donc arctan :

atan :]-∞ ;+∞[→]-π/2 ;+π/2[

x=tan(y) => y=atan(x)



Ceci donne par définition :

y=atan(x) ⇔ x=tan(y) avec

$x\in]-\infty;+\infty[$ **et** $y\in]-\pi/2;\pi/2[$

2. Dérivée

$$atan(x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

3. Propriétés

Sur $]-\infty;+\infty[$, $atan(x)'=\frac{1}{1+x^2}$ est positive donc arctan(x) est strictement croissante.

Arctangente est une fonction impaire.

4. Exercice

1) Soit la fonction f(t)=atan(t)+atan(1/t).
Donnez son domaine de définition, sa parité, sa dérivée.
Conclure en exprimant plus simplement cette fonction. Est-elle prolongeable par

continuité ?

2) Compléter le tableau suivant, en indiquant aussi les bons x à choisir (à partir du tableau des angles usuels à connaître du TD sur le cercle trigonométrique)

x									
atan(x)									

III) <u>Coordonnées polaires</u>

Nous pouvons repérer un point dans le plan par ses coordonnées polaires : la distance du point M au centre, ou longueur du segment [OM] : $\rho=\overline{OM}$ et l'angle entre l'axe des ordonnées et le vecteur $\overline{OM}$: $\theta=(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})$.

Comme toute distance, $\rho=\overline{OM}$ est à valeur positive ou nulle, $\rho\geq 0$.

Le couple ρ , θ est formé des coordonnées polaires du point M.

A) *<u>coordonnées cartésiennes</u>*

Les points dans le plan sont plus souvent repérés par leurs coordonnées cartésiennes : (x;y) où x est l'abscisse et y l'ordonnée.

1) Exprimer x et y en fonction de ρ et θ .

2) Avec a>0, identifier les 4 cas particuliers suivants : (a,0), (-a,0), (0,a) et (0,-a)

3) Comment peut-on dire si $\theta\in]-\pi;-\pi/2[$, $\theta\in]-\pi/2;0[$, $\theta\in]0,\pi/2[$ ou $\theta\in]\pi/2;\pi[$ à 2π près.

4) Par une opération simple entre x et y, trouver $\tan(\theta)$ Ceci est-il suffisant pour identifier θ ?

5) Trouver un paramètre en plus de $\tan(\theta)$ pour identifier θ à 2π près.

B) *<u>Transformation</u>*

Complétez le tableau ci-contre sans calculette :

cartésiennes	(x,y)	(1,-1)		$(-\sqrt{3},1)$		(1,)	$(-3,-\sqrt{3})$
polaires	(ρ,θ)		$(2,\pi)$		$\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(,\frac{\pi}{3}\right)$	

IV) <u>atan2</u>

En trigonométrie, la fonction **atan2** à deux arguments est une variante de la fonction atangente. Pour tous arguments réels x et y non nuls, atan2(x,y) est l'angle en radians entre la partie positive de l'axe des x d'un plan, et le point de ce plan de coordonnées (x, y). Cette fonction, présente dans beaucoup d'environnement est implémentée sur vos calculettes.

Version avant 2023 : dans la fonction Pol qui s'obtient avec SECONDE → Pol (). Cette fonction passe des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires. Le second membre du résultat est donc atan2(x, y), le premier n'est autre que $\sqrt{x^2+y^2}$

Pol(4;5) s'affiche en faisant :

- Seconde→ + (Pol)
- 4

Version 2023 : catalog, choisir angl/coord/Sexa ensuite choisir « cartésien à pol. », la réciproque « pol. à cartessien » arrive juste après dans les choix.

- Seconde → 3 (;)
- 5
-)
- EXE

Le résultat s'affiche : r=6,4031... ; θ =51,34019...

Je pense quoi de ce résultat ?

4²+5²=16+25=41 entre 36=6² et 49=7². r semble correct.

y>x>0 => $\theta \in]\pi/4;\pi/2[$. Je remarque que 45< θ <90 : le calcul a été fait en degré. Attention, c'est une erreur courante en maths, il faut faire attention à l'unité des angles qu'on utilise. SECONDE → MODE (CONFIG) → 4 permet de passer en mode radian.

À côté de la fonction Pol, il y a la fonction Rec qui fait la transition inverse.

Vous pouvez commencer à tester ces deux fonctions sur le tableau précédent avant de remplir ce nouveau tableau en utilisant ces fonctions :

cartésiennes	(x,y)	(-15,20)	(0,-100)	(-50,-50)	(230,0)	(10,-60)	(100;230)
polaires	(ρ,θ)						

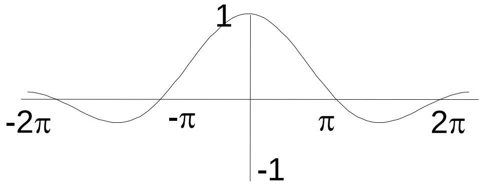
Ceci vous servira énormément en énergie pour la manipulation des complexes à partir du S2.

V) Fonction sinus cardinal (sin(x)/x)

On note sinc(x) la fonction sinus cardinal qui a pour valeur $sinc(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ pour x≠0 et qui vaut 1 pour x=0. La fonction sinc est "égale" à la fonction sin(x)/x, de plus elle est définie en x=0 où elle a pour valeur 1. C'est le prolongement par continuité en 0 de la fonction sin(x)/x. Cette fonction est très utilisée en traitement du signal et apparaît dans plusieurs phénomènes physiques comme la diffraction de la lumière.

Exercice :

- Étudier la parité de la fonction sinc(x)
- Tracer sur un même graphique sin(x), sinc(x) et |sinc(x)|.
- Trouver les solutions de l'équation sinc(x)=0
  - Écrire la fonction $x(t)=\frac{\sin(\pi t/\tau)}{\pi t}$ où τ est une constante, en utilisant la fonction sinus cardinal.
- Trouver les solutions de l'équation x(t)=0



fonction cardinal sinc(x)

Alphabet grec

Nom	minuscule	Majuscule	Nom	minuscule	Majuscule
alpha	α	Α	nu	ν	Ν
bêta	β	Β	ksi ou xi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	ο	Ο
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ϵ	Ε	rhô	ρ	Ρ
zêta	ζ	Ζ	sigma	σ *	Σ
êta	η	Η	tau	τ	Τ
thêta	θ	Θ	upsilon	υ	Υ
iota	ι	Ι	phi	φ	Φ
kappa	κ	Κ	khi	χ	Χ
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu	μ	Μ	oméga	ω	Ω

* : en fin de mot les Grecs mettaient plutôt ς pour le sigma.

Index lexical